Stanisław Szuba

Ćwiczenia laboratoryjne z fizyki

Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej

Stanisław Szuba

Ćwiczenia laboratoryjne z fizyki

Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej
Poznań 2004

Redaktor
RENATA LUBAWY

Projekt okładki
PIOTR GOŁĘBNIAK

Skład tekstu
STANISŁAW SZUBA

ISBN 83-7143-352-2

WYDAWNICTWO POLITECHNIKI POZNAŃSKIEJ
60-965 Poznań, pl. M. Skłodowskiej-Curie 2
tel. (0 prefiks 61) 6653516, faks (0 prefiks 61) 6653583
e-mail: office_ed@put.poznan.pl, www.ed.put.poznan.pl

Sprzedaż publikacji: Księgarnia „Politechnik"
ul. Piotrowo 3, 61-138 Poznań
tel. (0 prefiks 61) 6652324, faks (0 prefiks 61) 6652326
e-mail: politechnik@politechnik.poznan.pl, www.politechnik.poznan.pl

Wydanie I

Druk: Zakład Poligraficzny A. Frąckowiak, tel. 0502 604 192
e-mail: afdruk@icpnet.pl

Spis treści

Przedmowa

Ćwiczenia laboratoryjne stanowią ważne ogniwo w nauczaniu fizyki w szkole wyższej, gdyż są formą umożliwiającą bezpośrednie zetknięcie się ze zjawiskami fizycznymi, których poznanie, opis i objaśnienie jest celem fizyki. Szczególna rola tych ćwiczeń wynika przede wszystkim z rzeczywistego charakteru zjawisk fizycznych, z możliwości zmierzenia wielkości charakteryzujących zjawiska i ustalenia ilościowych związków między nimi. Ze względu na bezpośredni, indywidualny udział każdego studenta w przebiegu zjawiska zajęcia w laboratorium są formą bardzo efektywną, umożliwiającą trwałe przyswojenie wiadomości.

Za główne cele ćwiczeń laboratoryjnych należy przyjąć:

- naukę techniki pracy eksperymentalnej,
- opanowanie metod pomiarów fizycznych,
- poszerzenie i pogłębienie wiadomości ogólnych.

Osiągnięcie powyższych celów będzie możliwe, jeżeli każde wykonane w laboratorium ćwiczenie będzie poprzedzone odpowiednio przeprowadzoną przez studenta pracą przygotowawczą. Przed przystąpieniem do pomiarów należy dobrze zrozumieć istotę metody pomiarowej, znać budowę i zasadę działania stosowanych przyrządów, a także znać pojęcia i rozumieć zjawiska, z którymi mamy do czynienia w danym ćwiczeniu.

Praca przygotowawcza jest w zasadzie pracą samodzielną, a ułatwić ją może niniejszy skrypt, który jest dostosowany do warunków I Laboratorium Fizycznego Politechniki Poznańskiej.

Skrypt zawiera opis ćwiczeń aktualnie wykonywanych w laboratorium. Opis każdego ćwiczenia rozpoczyna się wprowadzeniem, w którym są zawarte najistotniejsze pojęcia dotyczące badanego zjawiska. Student, dla którego omawiane pojęcia i zjawiska nie są zrozumiałe ze względu na dość skondensowaną formę ich przedstawienia, powinien sięgnąć do podstawowych podręczników fizyki. Ze względu na uniwersalny charakter polecane są następujące podręczniki:

- J. Massalski, M. Massalska: *Fizyka dla inżynierów*,
- R. Resnick, D. Halliday: *Fizyka*,
- B. Jaworski, A. Dietłaf: *Kurs fizyki*.

Przedstawiono także metody pomiarowe, czyli sposób wykorzystania ogólnych praw do wyznaczenia szukanej wielkości fizycznej lub związku między wielkościami. W ćwiczeniach, w których stosuje się specjalne przyrządy lub urządzenia, opisano zasady ich działania i konstrukcję.

Przebieg ćwiczenia są to wypunktowane kolejne czynności do wykonania. Ma to ułatwić przeprowadzenie doświadczenia i opracowania go. Opisany przebieg ćwiczenia jest tylko wskazówką i nie musi być traktowany dosłownie. Należy

mocno podkreślić, że przygotowanie do ćwiczenia nie może się ograniczać do poznania przebiegu ćwiczenia, lecz przede wszystkim musi polegać na poznaniu praw i zjawisk związanych z tematem oraz zrozumieniu metody pomiarowej.

Na końcu opisu każdego ćwiczenia zestawiono tzw. pojęcia kluczowe, których znajomość jest niezbędna do pełnego zrozumienia zagadnienia. Zestawienie tych pojęć ma ułatwić studentowi samokontrolę stanu przygotowania do ćwiczenia. Większość pojęć kluczowych jest opisana we wprowadzeniu do ćwiczenia, przy niektórych znajdują się odsyłacze do innych części skryptu, a pozostałych należy szukać w podanych powyżej podstawowych podręcznikach.

Szerzej opisano zasady i sposoby pomiarów oraz budowę stosowanych przyrządów. Przyrządy o zastosowaniu powszechnym omówiono w osobnym rozdziale, zatytułowanym „Podstawowe przyrządy laboratoryjne", a przyrządy specjalne – przy odpowiednim ćwiczeniu.

Każdy wynik pomiaru musi być poddany ocenie krytycznej. W związku z tym w rozdziale pt. „Analiza wyników pomiarów" omówiono w zwarty sposób metody oceny niepewności pomiarów. Wiadomości z tego rozdziału są potrzebne w każdym ćwiczeniu.

Uzupełnienie skryptu stanowi krótki zbiór tablic wielkości fizycznych. Obejmuje on w zasadzie te wielkości, które są przedmiotem badań. Dane zawarte w tablicach mogą być pomocne do konfrontacji wyników uzyskanych na ćwiczeniach z danymi otrzymanymi przez badaczy.

Analiza wyników pomiarów

1. Pomiary fizyczne

Doświadczalne wyznaczenie wielkości fizycznej jest na ogół czynnością złożoną, w której można wyróżnić 3 etapy:

- wykonywanie pomiarów bezpośrednich,
- obliczanie szukanej wielkości na podstawie znanej zależności funkcyjnej między tą wielkością a wielkościami zmierzonymi bezpośrednio oraz
- ocena błędu, którym jest obarczona wyznaczana wielkość.

Tylko nieliczne wielkości mogą być zmierzone bezpośrednio za pomocą odpowiednich przyrządów. Należą do nich m.in. wielkości podstawowe: czas, długość, masa i natężenie prądu. Pomiar polega na porównaniu danej wielkości fizycznej z wzorcem tej wielkości przyjętym za jednostkę. Szereg innych wielkości możemy także odczytać bezpośrednio na skali przyrządu; pomiary te również zaliczamy do bezpośrednich, chociaż wskazywana wielkość jest wynikiem pomiaru innej wielkości i odpowiedniego obliczenia. Na przykład, woltomierz jest przyrządem mierzącym bezpośrednio natężenie prądu, a wartość napięcia jest obliczona z prawa Ohma $U = R\, i$ (R jest znanym oporem wewnętrznym) i ten wynik odczytujemy na skali przyrządu. Wielkości mierzone bezpośrednio nazywają się *wielkościami prostymi*.

W celu wyznaczenia wielkości złożonej musimy dokonać pomiaru kilku wielkości prostych i następnie zastosować odpowiedni wzór łączący wielkości proste z wielkością szukaną.

Pomiar danej wielkości fizycznej może być pomiarem złożonym lub bezpośrednim, zależnie od zastosowanych przyrządów. Jako przykład rozpatrzmy pomiar mocy prądu elektrycznego. Jeżeli mamy amperomierz i woltomierz, to dokonujemy pomiarów dwóch wielkości prostych – natężenia prądu (i) i napięcia (U), a następnie obliczamy moc ze związku $P = U\, i$. W tej sytuacji P jest wielkością złożoną. W innym przypadku możemy zastosować watomierz, który wskaże moc prądu bezpośrednio na skali przyrządu – wtedy P jest wielkością prostą.

Wyniki pomiarów bezpośrednich, a także wyniki obliczeń zapisujemy w tabelach. Planując tabelę, musimy przewidzieć, jakie wielkości będą mierzone bezpośrednio, a jakie będą obliczane. *Niewłaściwe jest wpisywanie do tabeli wyników uzyskanych przez proste obliczenia w pamięci, z pominięciem odczytów pierwotnych.* Na przykład, do pomiaru okresu drgań wahadła przewidujemy trzy rubryki: 1 – liczba drgań (n), 2 – czas n drgań (t), 3 – okres drgań (T), a nie tylko rubrykę ostatnią, do której wpisalibyśmy obliczony w pamięci iloraz czasu całkowitego i liczby drgań. Tabela musi odzwiercie-

dlać przede wszystkim wykonane pomiary bezpośrednie. Podobnie należy zapisywać każdy wynik pomiaru wykonywanego wielokrotnie, a nie tylko wartość średnią.

Tabela 1.1. Przykładowa tabela pomiarów

Częstotliwość f (Hz)	Położenie 1 x_1 (cm)	Położenie 2 x_2 (cm)	Położenie 3 x_3 (cm)	x_2-x_1 (cm)	x_3-x_2 (cm)
3505	21,4	35,8	47,6	14,4	11,8
5220	18,0	25,2	33,7	7,2	8,5

2. Obliczenia i wykresy

Zasady ogólne

Zmierzone wielkości proste pozwalają wyznaczyć, zależnie od charakteru wykonywanego pomiaru, *stałe uniwersalne* (np. ładunek elementarny, stałą Plancka), *stałe materiałowe* (np. moduł sprężystości, współczynnik załamania światła) lub określić *zależność funkcyjną* jednej wielkości fizycznej od drugiej (np. przewodnictwa od temperatury, oświetlenia od odległości).

Wykresy

W przypadku obliczania stałych, zarówno uniwersalnych jak i materiałowych, drugi etap doświadczenia polega na wstawieniu wyników pomiarów bezpośrednich do właściwego wzoru i wykonaniu rachunków. Wynik końcowy jest liczbą mianowaną wyrażoną w jednostkach wyznaczonej wielkości fizycznej.

Gdy celem doświadczenia jest znalezienie zależności między dwoma wielkościami fizycznymi, wówczas wynik przedstawiamy najczęściej w postaci graficznej. Pomiary polegają wtedy na świadomej zmianie jednej wielkości, np. x, i na znajdowaniu odpowiadających jej wartości drugiej wielkości, np. y. Graficznym obrazem badanej zależności jest *wykres funkcji* $y = f(x)$.

Sporządzenie poprawnego wykresu wymaga przestrzegania poniższych reguł.

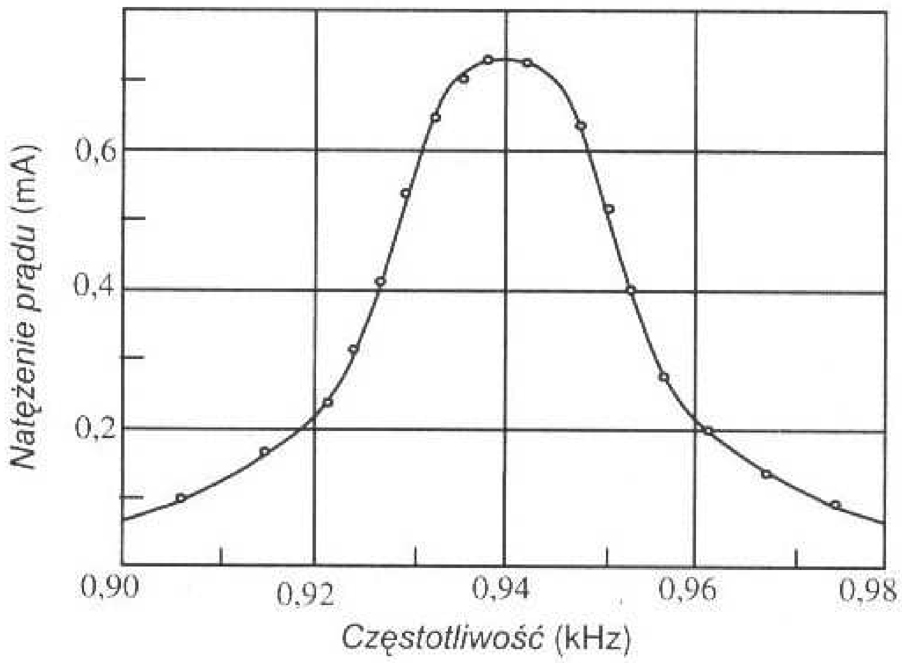
1. *Oś odciętych* (pozioma) reprezentuje zmienną niezależną, a *oś rzędnych* – zmienną zależną. W pobliżu osi wpisujemy nazwy odpowiedniej wielkości i jednostki. *Długość obu osi* powinna być w przybliżeniu taka sama – 10–20 cm. Wówczas powierzchnia wykresu będzie zbliżona do kwadratu. Oś jest tym dłuższa, im więcej szczegółów zawiera wykres.
2. *Skalę* nanosimy na oś współrzędnych w taki sposób, aby zakres pomiaru zajmował prawie całą długość osi. Na początku osi lub w jej pobliżu umiesz-

czamy *podziałki skali* odpowiadające najmniejszym wartościom mierzonym – nie muszą to być wartości zerowe. Największe mierzone wartości powinny się znajdować w pobliżu końca osi. Podziałki skali powinny być dobrane w taki sposób, aby łatwo można było znaleźć na osi dowolną wartość mierzonej wielkości. Ten wymóg będzie spełniony, gdy zastosujemy regułę:

$$1 \text{ cm osi} - (1 \text{ albo } 2, \text{ albo } 5)\cdot 10^n, \tag{2.1}$$

gdzie n jest liczbą całkowitą. Po ustaleniu działki skali długość osi może ulec zmianie w stosunku do pierwotnie zaplanowanej.

3. *Działki opisane* tworzymy przez dodanie wartości przy niektórych podziałkach. Wzdłuż osi powinno być 3–6 opisanych wartości, rozmieszczonych w regularnych odstępach. Błędne jest zaznaczanie na osiach wartości pomiarów.



Rys. 2.1. Przykład wykresu we współrzędnych liniowych

4. *Punkty pomiarowe* zaznaczamy krzyżykami, kółkami lub innymi figurami geometrycznymi, lecz nie kropkami, które są mało widoczne. Gdy na jednym arkuszu nanosimy kilka krzywych, punkty należące do każdej z nich oznaczamy w inny sposób. Sam punkt pomiarowy powinien się znajdować w środku znaczka. Liczba punktów, którą należy się posługiwać przy sporządzaniu wykresu, nie może być zbyt mała – przynajmniej 10–15 punktów. Jeśli przebieg krzywej wykazuje maksimum, minimum lub punkt przegięcia, to w pobliżu tych miejsc punkty pomiarowe powinny być zagęszczone, gdyż umożliwia to prawidłowe prowadzenie krzywej.
5. *Krzywa* odzwierciedlająca badaną zależność powinna być gładka, tzn. bez ostrych załamań i lokalnych ekstremów. Przeważnie nie przebiega ona przez wszystkie punkty pomiarowe, lecz w taki sposób, aby liczba punktów leżących

po jej obu stronach była w przybliżeniu jednakowa, a ich rozkład przypadkowy.

PRZYKŁAD

Wykreślamy krzywą rezonansową obwodu drgającego, czyli zależność natężenia prądu przemiennego od częstotliwości (rys. 2.1).
Zakres częstotliwości: $0{,}906 < \omega < 0{,}975$ MHz. Przyjmujemy wartości dla początku układu $\omega = 0{,}9$ MHz, dla końca – $\omega = 0{,}98$ MHz, długość osi – 10 cm. Wówczas podziałce o długości 1 cm odpowiada 0,008 MHz. Najbliższą wartością spełniającą warunek (2.1) jest 0,01 MHz/cm ($1 \cdot 10^{-2}$). Po przyjęciu takiej wartości długość osi odciętych wynosi 8 cm.
Zakres natężenia prądu: $0 < i < 0{,}8$ mA. Przyjmujemy wartość dla początku układu $i = 0$, dla końca osi – $i = 0{,}8$ mA, długość osi – 8 cm. Wówczas podziałce o długości 1 cm odpowiada prąd 0,1 mA.
Dzięki tak dobranej skali na osiach wykres zajmuje całą powierzchnię i jest najbardziej czytelny.

Skale na osiach rys. 2.1 są liniowe, tzn. odległości między punktami na osi są wprost proporcjonalne do przyrostów wielkości reprezentowanej przez tę oś. Wykresy w skali liniowej stosuje się w przypadku, gdy przedstawiamy graficznie zależność liniową lub nieznaną zależność nieliniową o zakresie zmian zawierającym się w ramach jednego rzędu.

Procesy fizyczne, również te, z którymi spotykamy się w laboratorium, są często opisane funkcjami nieliniowymi, a celem pomiaru może być sprawdzenie charakteru funkcji lub wyznaczenie pewnej wielkości występującej w związku nieliniowym. W tych przypadkach stosujemy zazwyczaj wykresy o *skalach nieliniowych.*

Na przykład, w ruchu jednostajnie przyspieszonym wykresem drogi (s) w funkcji czasu (t) jest parabola opisana funkcją $s = \upsilon_0 t + ½at^2$. Chcąc sprawdzić, czy badany ruch jest rzeczywiście jednostajnie przyspieszony, sporządzamy wykres we współrzędnych: $y = s$, $x = t^2$. Jeżeli wykresem jest linia prosta, oznacza to spełnienie równania, a zatem potwierdzenie ruchu jednostajnie przyspieszonego. Wykres odbiegający od prostej świadczy, że ruch jest innego rodzaju.

Jako drugi przykład rozpatrzymy zależność przewodnictwa (σ) od temperatury (T) dla półprzewodników

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{E}{kT}}. \qquad (2.2)$$

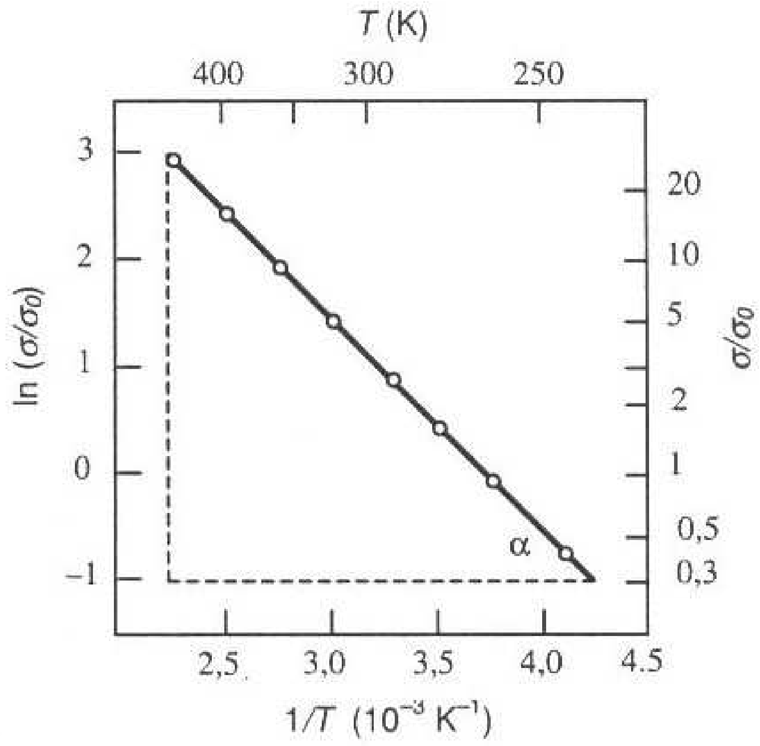
W celu sprawdzenia, czy uzyskane punkty pomiarowe spełniają równanie (2.2) sporządzamy wykres we współrzędnych, w których powyższe równanie byłoby linią prostą. Można się przekonać, że współrzędnymi tymi są:

$$y = \ln(\sigma/\sigma_0), \qquad x = 1/T. \qquad (2.3)$$

Po zlogarytmowaniu równania (2.2) i wykonaniu podstawień (2.3) otrzymujemy związek

$$y = (-E/2k)\,x\,, \tag{2.4}$$

którego wykresem jest linia prosta o współczynniku nachylenia $-E/2k$ (rys. 2.2).



Rys. 2.2. Przykład wykresu we współrzędnych nieliniowych

Jeżeli wykres doświadczalny w tak wybranym układzie współrzędnych jest linią prostą, stanowi to potwierdzenie, że przewodnictwo zmienia się z temperaturą według równania (2.2). Pomiar *współczynnika nachylenia* prostej na wykresie pozwala ponadto wyznaczyć dodatkowe wielkości, w opisywanym przypadku np. E (gdy znane jest k).

Należy zwrócić uwagę, że współczynnik nachylenia nie jest tangensem kąta nachylenia zmierzonego geometrycznie, lecz na ogół wielkością mianowaną wyznaczoną ze stosunku przyrostów współrzędnych $\Delta y/\Delta x$. Można się łatwo przekonać, że współczynnik nachylenia prostej na rys. 2.2 wynosi –1430 K.

Uzupełnieniem opisu wykresu jest często skala wielkości podstawowej (o nierównych podziałkach) naniesiona na osiach pomocniczych (σ i T na rys. 2.2). Przygotowując dane do wykresu we współrzędnych nieliniowych, należy pamiętać o przewidzeniu w tabeli rubryki dla obliczonych funkcji mierzonych wartości, np. $\ln\sigma$, $1/T$.

Regresja liniowa

Przypuśćmy, że wykonujemy pomiary dwóch zależnych od siebie wielkości x, y. Punkty pomiarowe określone odpowiednimi parami wartości $x_1, y_1 \ldots x_i, y_i$ nano-

simy na wykres i chcemy poprowadzić linię ciągłą, która ma przedstawić rzeczywistą zależność y od x w całym zakresie zmienności x. Ponieważ wiemy, że każdy z punktów pomiarowych jest obarczony pewnym błędem, nie ma sensu prowadzić linii dokładnie przez uzyskane punkty. Najczęściej znana jest ogólna postać funkcji $y(x)$ opisująca badane zjawisko. Na przykład, w rzucie poziomym z wysokości y_0 wysokość ciała dla różnych współrzędnych x jest określona funkcją:

$$y = y_0 - \frac{g}{2v_0^2} x^2 . \tag{2.5}$$

Wykresem powyższej zależności jest parabola, ale jej dokładny kształt pozostaje nieokreślony, dopóki nie są znane parametry y_0, v_0 i g.

W praktyce znamy najczęściej kształt krzywej teoretycznej, natomiast nie znamy parametrów funkcji. Dopasowania funkcji teoretycznej do danych pomiarowych można dokonać, stosując tzw. metodę najmniejszych kwadratów.

Oznaczmy wartość funkcji teoretycznej w punkcie x_i przez $y(x_i)$, a wartość zmierzoną w tym punkcie przez y_i. Odchylenie wartości mierzonej od teoretycznej dla każdego pomiaru wynosi

$$y(x_i) - y_i \quad . \tag{2.6}$$

Postulat Gaussa mówi, że dopasowanie jest najlepsze, gdy suma kwadratów odchyleń we wszystkich punktach przyjmie najmniejszą wartość, co można wyrazić w postaci równania:

$$\sum_{i=1}^{n} \left[y(x_i) - y_i \right]^2 = \text{minimum} . \tag{2.7}$$

Stosowanie metody najmniejszych kwadratów jest łatwe tylko dla funkcji liniowych – w tym przypadku metoda nazywa się *regresją liniową*.

Warunek (2.7) zastosowany do funkcji liniowej

$$y = a\,x + b \tag{2.8}$$

pozwala, po odpowiednich przekształceniach, znaleźć parametry charakteryzujące daną prostą: *współczynnik nachylenia* (a) i *punkt przecięcia* prostej z osią y (b). Parametry te możemy obliczyć z następujących równań:

$$a = \frac{n\sum x_i \sum y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} , \tag{2.9}$$

$$b = \frac{n\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} , \tag{2.10}$$

gdzie n jest całkowitą liczbą par (x, y), a wartości wskaźnika i przebiegają zakres $[1...n]$.

Znając parametry a i b, można wykreślić właściwą linię prostą, a także znaleźć wartość y dla dowolnego x na podstawie równania (2.8).

Stosując regresję liniową, należy zwrócić uwagę na to, czy punkty pomiarowe są rozłożone w sposób przypadkowy względem linii prostej, gdyż inny rozkład punktów świadczy o tym, że funkcja $y(x)$ nie jest liniowa.

PRZYKŁAD

Wyznaczenie parametrów prostej na podstawie następujących pomiarów:

x	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
y	1,0	2,0	2,2	2,5	4,0	5,0	4,5	5,5

Odpowiednie sumy w równaniach (2.9) i (2.10) wynoszą:

$$\sum x = 18 \;,\; \sum y = 26{,}7 \;,\; \sum xy = 73{,}55 \;,\; (\sum x)^2 = 324 \;,\; \sum x^2 = 51.$$

Parametry prostej mają wartości: $a = 1{,}28$, $b = 0{,}45$.

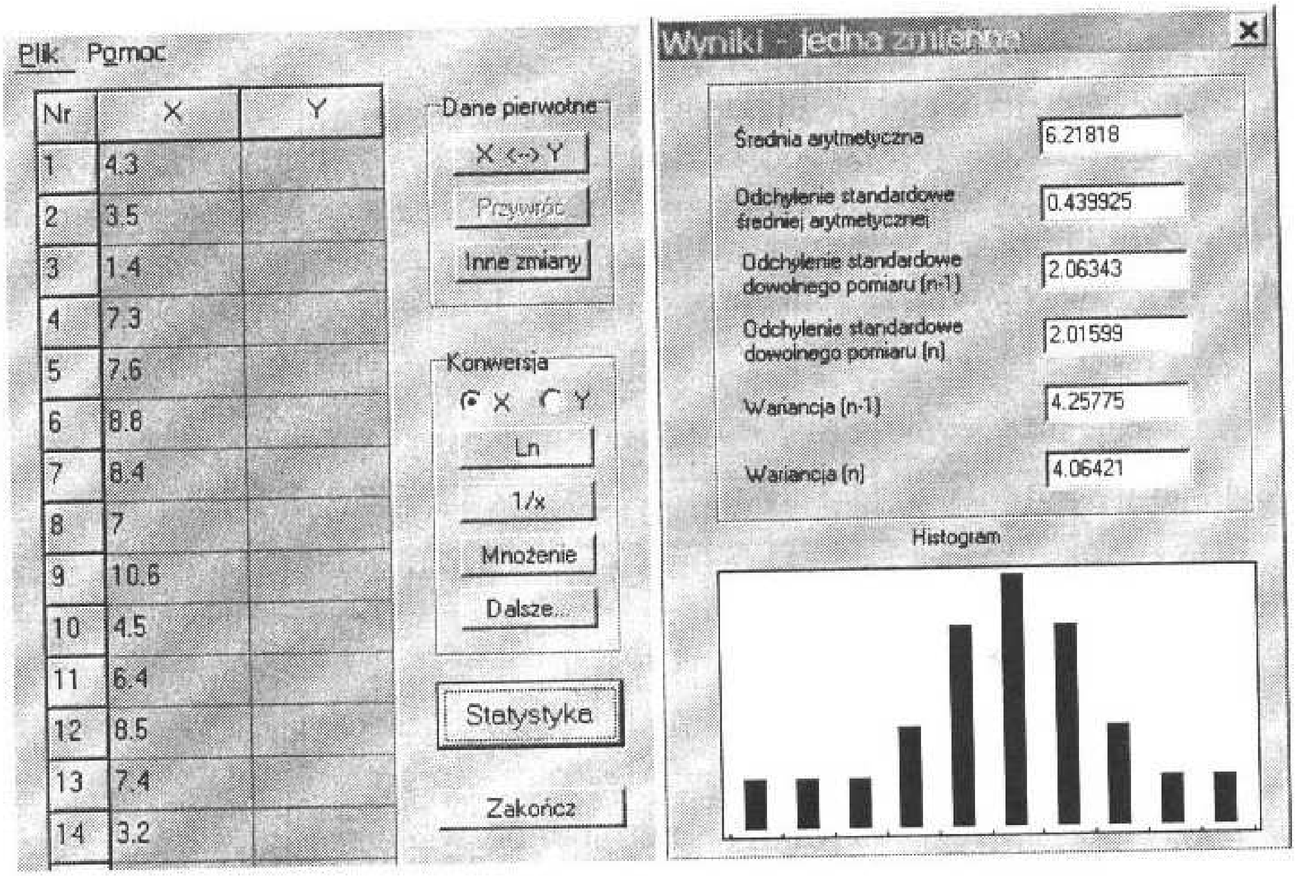
Regresję liniową można stosować nie tylko do wielkości jawnie zależnych liniowo, lecz także do każdej pary wielkości opisanych funkcją dającą się przedstawić w postaci liniowej przez zastosowanie odpowiednich podstawień (por. wzór 2.2 i następujący po nim opis).

Istotną korzyścią stosowania regresji liniowej jest zwiększenie dokładności parametrów obliczonych tą metodą w stosunku do wartości uzyskanych bezpośrednio z wykresu.

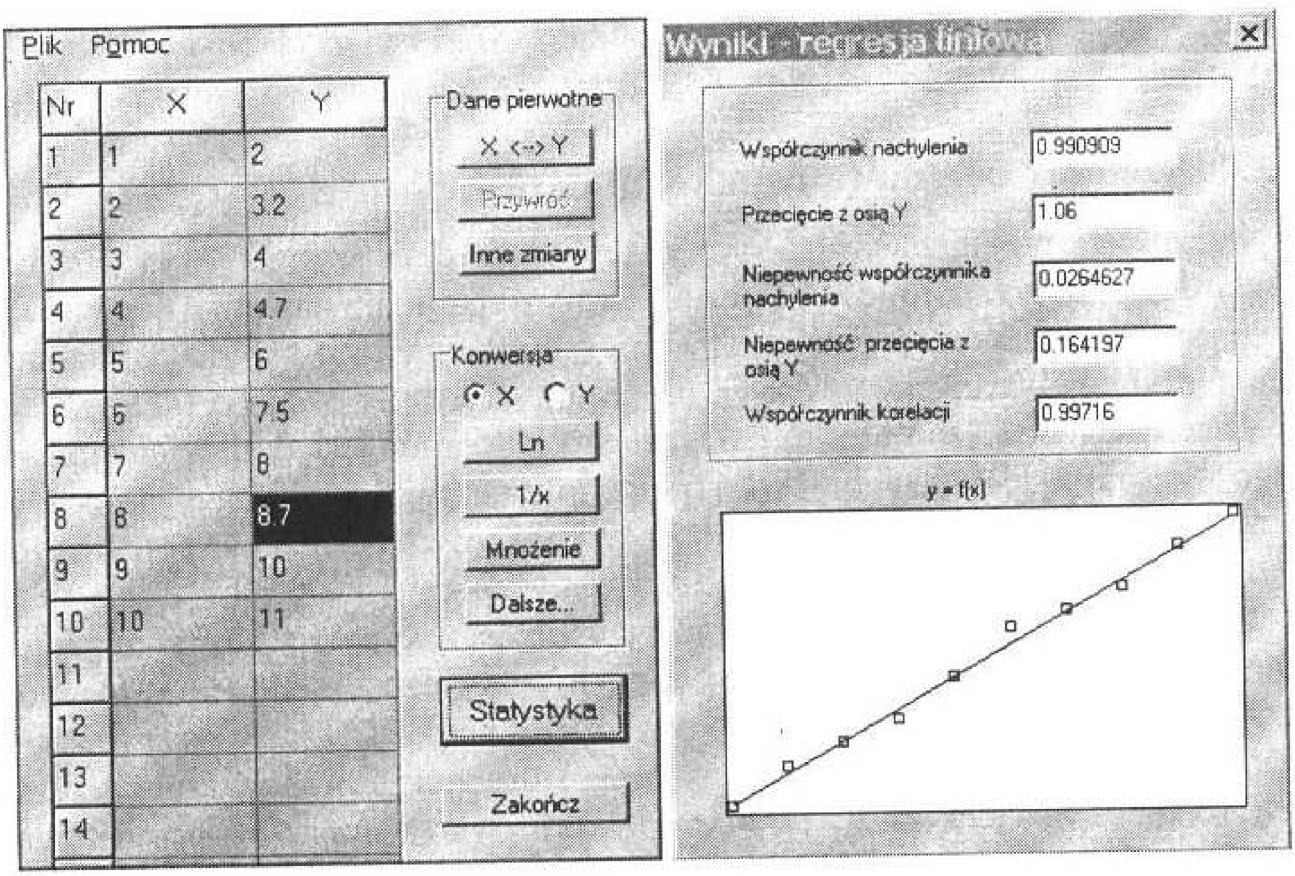
Obliczenia z zastosowaniem komputera

Najczęściej powtarzanymi obliczeniami są średnia arytmetyczna, odchylenie standardowe i regresja liniowa. Ręczne ich wykonanie lub nawet za pomocą kalkulatora wymaga dużo czasu, a nie uczy nowych umiejętności. Aby wykonać te obliczenia szybko, warto skorzystać z programu komputerowego StatS specjalnie przeznaczonego do laboratorium fizycznego. Program jest dodatkiem do niniejszego skryptu i jest dostępny na stronie internetowej www.phys.put.poznan.pl. Żeby uzyskać wymagane wyniki, należy tylko wprowadzić dane do tabeli, a odpowiednie obliczenia zostaną wykonane automatycznie.

W przypadku pomiarów pojedynczej wielkości wypełnia się tylko jedną kolumnę, a okienko wyników zawiera średnią arytmetyczną, odchylenia standardowe oraz wariancje (rys. 2.3). Podstawową miarą błędu średniej jest odchylenie standardowe średniej, a pozostałe wyrażenia stosuje się w uzasadnionych przypadkach. Rysunek zawiera także *histogram,* czyli wykres słupkowy przedstawiający liczbę uzyskanych pomiarów (oś pionowa) w szeregu przedziałów wartości (oś pozioma). Histogram ilustruje rozkład pomiarów, który dla dostatecznie dużej serii pomiarów powinien przyjmować kształt krzywej Gaussa.



Rys. 2.3. Okienko danych i wyników dla jednej wielkości



Rys. 2.4. Okienka danych i wyników dotyczących pary wielkości

Rysunek 2.4 przedstawia okienko danych pary wielkości oraz okienko wielkości charakteryzujących regresję liniową – współczynnik nachylenia, punkt przecięcia z osią *Y*, błędy (niepewności) obu tych wielkości, a ponadto współczynnik korelacji. Na rysunku jest także wykres w postaci punktów (x, y) i linia prosta o parametrach obliczonych z regresji liniowej. Ten wykres dostarcza również wizualnej informacji, czy punkty pomiarowe są rozłożone przypadkowo względem linii prostej (tylko wtedy można stosować regresję).

Bardzo pożyteczną funkcją omawianego programu jest *konwersja danych*, polegająca na wykonaniu operacji na wszystkich danych wybranej kolumny. Przykładowo, dla kolumny *X* obliczamy odwrotności $(1/x)$, a dla kolumny *Y* logarytmy $(\ln y)$.

Wykresy w odpowiednich okienkach są tylko uproszczoną ilustracją wyników i nie powinny być w tej postaci wykorzystywane do przedstawiania opracowanych wyników.

3. Ocena błędów

Źródła błędów

Pomiary wykonywane w laboratorium nie odpowiadają nigdy dokładnie rzeczywistej wartości mierzonej wielkości. Są one obarczone większym lub mniejszym błędem. *Błędem pomiaru* nazywamy różnicę między zmierzoną wartością a wartością rzeczywistą. *Wartość prawdziwa* może być mniejsza lub większa od wartości zmierzonej.

Jeśli zmierzoną wartość oznaczymy przez x, wartość prawdziwą przez x_0, a dokładność odczytu przez Δx, to na podstawie powyższych uwag możemy powiedzieć, że wartość prawdziwa leży w przedziale między $x - \Delta x$ a $x + \Delta x$. Wynik pomiaru zapisujemy w postaci $x_0 = x \pm \Delta x$.

PRZYKŁAD

Termometr mający podziałki co 1°C wskazuje temperaturę $T = 24°C$. Błąd pomiaru wynosi 1°C. Rzeczywista temperatura jest zawarta w przedziale (23÷25°C). Wynik pomiaru temperatury $T = (24 \pm 1)°C$.

Błędy systematyczne

Błędy systematyczne wynikają z niedokładności przyrządów, z zastosowania złej metody pomiarowej lub z działania czynników zewnętrznych. Przyrządy pomiarowe są skonstruowane w taki sposób, aby wyniki prawidłowo przeprowadzonych pomiarów nie różniły się od wartości rzeczywistej więcej niż o wartość naj-

mniejszej działki skali, którą z tego powodu nazywamy *dokładnością odczytu*. W przypadku mierników elektrycznych dokładność może być większa – jest ona określona *klasą przyrządu*, tzn. liczbą wskazującą stosunek procentowy maksymalnego błędu systematycznego do zakresu miernika. Na przykład, dokładność miernika klasy 0,5 mającego skalę 100-działkową wynosi połowę wartości najmniejszej podziałki.

Opracowanie właściwej *metody pomiaru* nie jest rzeczą łatwą, gdyż wymaga uwzględnienia różnych zjawisk towarzyszących badanemu zjawisku i samemu pomiarowi, jak również wpływu pomiaru na mierzoną wielkość. Na przykład, pomiar czasu biegu zawodników na 100 m przez sędziów znajdujących się na mecie i uruchamiających stopery na głos strzału startera daje wartość mniejszą od rzeczywistej o czas potrzebny na dojście fali głosowej od startera do sędziów. Nieuwzględnienie tego opóźnienia powoduje błąd systematyczny około 0,3 s.

Użycie złej metody pomiaru może spowodować zmianę wartości mierzonej. Na przykład, przez włożenie termometru rtęciowego do małego naczynia z cieczą nie zmierzymy właściwej temperatury cieczy, lecz temperaturę ustaloną w wyniku wymiany ciepła między termometrem a cieczą. Właściwą metodą pomiarową byłoby w tym przypadku użycie termoogniwa, które praktycznie nie pobiera ciepła od badanego ciała z powodu małej wartości własnej pojemności cieplnej.

Do złej metody pomiaru zaliczamy także obserwację wskazań przyrządów pod niewłaściwym kątem, co prowadzi do tzw. błędu *paralaksy*, a także stosowanie przybliżonych wzorów do obliczania wielkości złożonych.

Błędy metody pomiarowej są najczęściej trudne do oszacowania ilościowego. W praktyce za błąd systematyczny przyjmujemy najczęściej dokładność przyrządu.

Błędy przypadkowe

Powtarzając wielokrotnie pomiar wielkości prostej za pomocą przyrządu o dużej dokładności (mały błąd systematyczny), uzyskujemy każdorazowo inny wynik, a różnice między odczytami znacznie przewyższają błąd systematyczny. Zmierzone wartości są obarczone błędami przypadkowymi, których źródłem są właściwości badanego obiektu (zjawiska), przyrządu lub osoby prowadzącej pomiar.

Mierząc np. średnicę drutu mikromierzem, uzyskujemy różne wyniki ze względu na zmiany średnicy w różnych miejscach oraz ze względu na różny docisk śruby. Szczególną rolę odgrywają błędy przypadkowe w *pomiarach subiektywnych*, jak np. porównywanie oświetleń, ocena maksimum natężenia dźwięku czy zanikanie prądu. Błędów przypadkowych nie można uniknąć, ale można zmniejszyć ich wpływ na wynik końcowy oraz obliczyć ich wartość. Sposoby obliczania błędów przypadkowych opisano niżej.

Błędy grube

Są one wynikiem pomyłek zaistniałych w czasie pomiarów (np. wyrażenie odczytu w centymetrach zamiast w milimetrach). Błędy grube przewyższają kilka-

krotnie pozostałe błędy, więc łatwo je zauważyć. Wynik obarczony błędem grubym powtarzamy lub odrzucamy.

Rozpoznawanie rodzaju błędu i powtarzanie pomiarów

Rozpoczynając pomiary, przede wszystkim musimy się dowiedzieć, jaki rodzaj błędu występuje przy pomiarze każdej z wielkości prostych. W celu ustalenia rodzaju błędu należy wykonać *serię próbną*: 3-krotny pomiar danej wielkości. Wyniki tej serii pozwolą nam określić rodzaj błędu, a także dalszy sposób pomiaru.

Jeżeli wszystkie pomiary w serii próbnej mają identyczną wartość, to wnioskujemy, że w pomiarze dominuje błąd systematyczny. Za wynik przyjmujemy dowolny z pomiarów, a za błąd – dokładność przyrządu.

Jeżeli pomiary w serii próbnej są różne, to w pomiarze dominuje błąd przypadkowy. Należy wtedy zwiększyć serię pomiarów do co najmniej 10, za wynik pomiaru przyjąć średnią arytmetyczną, a za błąd – odchylenie standardowe średniej arytmetycznej (patrz wzór 3.9).

Podstawowe pojęcia teorii błędów przypadkowych

Wartość rzeczywista, średnia arytmetyczna

Według teorii Gaussa za wynik pomiaru należy przyjąć wartość, dla której suma kwadratów odchyleń poszczególnych pomiarów jest najmniejsza. Wartością tą jest średnia arytmetyczna. Jeśli wykonamy n pomiarów i wynik każdego z nich oznaczymy przez x_i ($i = 1, 2, 3 \dots n$), to *średnią arytmetyczną* definiujemy następująco:

$$x_s = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \,. \tag{3.1}$$

Z rozważań teoretycznych wynika, że dla dostatecznie dużej liczby pomiarów wartość średniej arytmetycznej mało się różni od wartości rzeczywistej, dlatego za błąd poszczególnego pomiaru przyjmujemy odchylenie wartości pomiaru od średniej arytmetycznej

$$\varepsilon_i = x_i - x_s \,. \tag{3.2}$$

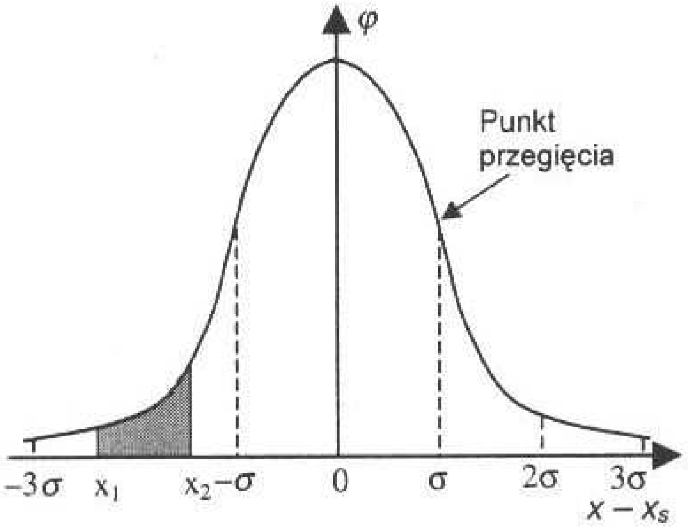
Rozkład błędów

Analizując wyniki pomiarów tej samej wielkości, dochodzimy do wniosku, że największe ich skupienie znajduje się w pobliżu wartości średniej. Liczba wyników odbiegających od średniej maleje ze wzrostem odchylenia. Rozkład błędów podlega prawom statystycznym i zachodzi według prawa wyrażonego równaniem (3.3) i przedstawionego graficznie na rys. 3.1.

$$\varphi(x - x_s) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-x_s)^2}{2\sigma^2}} . \qquad (3.3)$$

W powyższym wzorze $\varphi(x - x_s)$ oznacza gęstość prawdopodobieństwa wystąpienia pomiaru o wartości x lub błędu o wartości $x - x_s$, σ jest stałą charakteryzującą dokładność pomiaru. Prawdopodobieństwo uzyskania wyniku z przedziału (x_1,x_2) jest określone polem zawartym między osią x a krzywą $\varphi(x - x_s)$ oraz odciętymi x_1 i x_2 (rys. 3.1). Pole to możemy obliczyć przez całkowanie krzywej rozkładu:

$$P = \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x - x_s) dx . \qquad (3.4)$$



Rys. 3.1. Krzywa Gaussa rozkładu błędów przypadkowych

Obliczenie całki w granicach od $-\sigma$ do $+\sigma$ prowadzi do wniosku, że w tym zakresie mieści się 68,3% wszystkich błędów. Wartość σ, która jest odciętą punktu przegięcia krzywej Gaussa, nazywa się *odchyleniem standardowym* pomiaru.

Podobnie możemy obliczyć, że błędami mniejszymi od $|2\sigma|$ oraz $|3\sigma|$ jest obarczonych odpowiednio 95,4% i 99,7% wszystkich pomiarów. Z przedstawionych wartości wynika, że w praktyce błąd maksymalny pomiaru powinien być równy potrojonej wartości odchylenia standardowego.

Obliczenia błędów dowolnego pomiaru

Odchylenie standardowe dowolnego pomiaru σ serii składającej się z dużej liczby pomiarów o jednakowej dokładności obliczamy za pomocą wzoru:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2} , \qquad (3.5)$$

gdzie n jest liczbą pomiarów, a ε_i – odchyleniem wartości poszczególnego pomiaru od średniej arytmetycznej. Wartość prawdziwa leży w przedziale $(x_i - \sigma, x_i + \sigma)$, przy czym x_i jest wartością dowolnego pomiaru.

Do obliczeń numerycznych wygodnie jest stosować powyższy wzór przekształcony do postaci:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}}{n-1}} . \tag{3.6}$$

Kalkulatory różnych firm mają program wewnętrzny, uruchamiany odpowiednim przyciskiem, pozwalający obliczyć odchylenie standardowe po uprzednim wprowadzeniu wszystkich danych x_j. Przycisk ten najczęściej jest oznaczony przez σ_{n-1} lub S_{n-1}.

Błąd przeciętny definiujemy jako średnią arytmetyczną wartości bezwzględnych wszystkich odchyleń indywidualnych

$$\varepsilon_p = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |\varepsilon_i| . \tag{3.7}$$

Błąd przeciętny pomiaru z dużej serii jest mniejszy od odchylenia standardowego; teoretycznie można wykazać, że

$$\sigma_p = 0{,}8\sigma . \tag{3.8}$$

Obliczanie błędów średniej arytmetycznej

Średnia arytmetyczna wielu pomiarów danej wielkości nie pokrywa się całkowicie z wartością rzeczywistą, jednakże przedział wokół wartości średniej, w którym spodziewamy się znaleźć wartość rzeczywistą, jest znacznie mniejszy niż błąd pojedynczego pomiaru.

Odchylenie standardowe średniej arytmetycznej wyraża się wzorem:

$$\sigma_s = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2} . \tag{3.9}$$

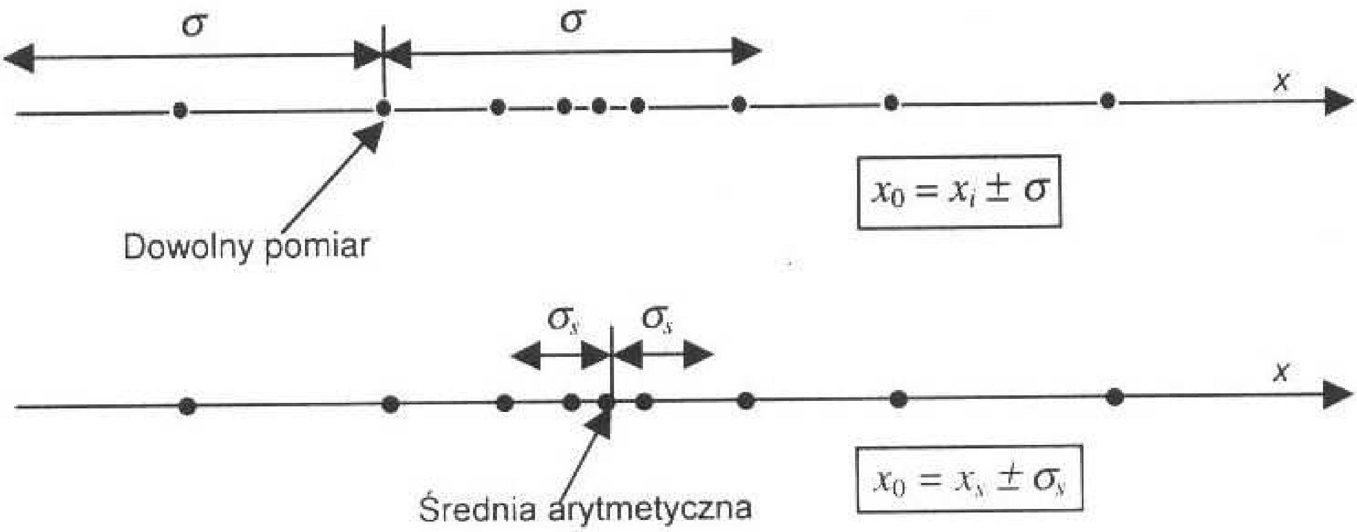
Wartość prawdziwa leży w przedziale ($x_s - \sigma_s$, $x_s + \sigma_s$), przy czym x_s jest wartością dowolnego pomiaru. Porównując wyrażenia (3.9) i (3.5), stwierdzamy, że zachodzi między nimi związek:

$$\sigma_s = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} . \tag{3.10}$$

Stosowanie powyższego związku jest szczególnie korzystne, gdy do obliczeń używamy kalkulatora mającego program obliczania σ. Interpretację obu rodzajów odchyleń na osi liczbowej przedstawia rys. 3.2.

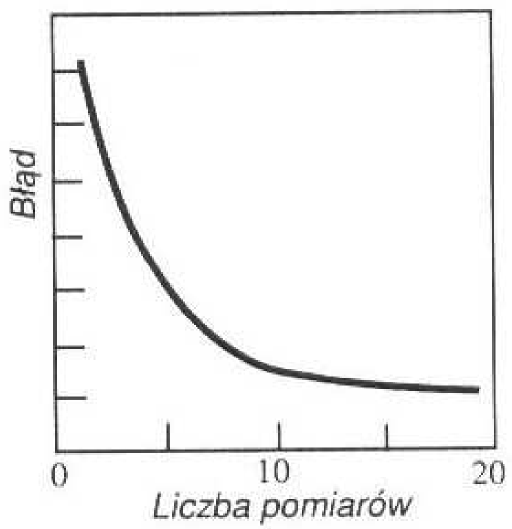
Błąd przeciętny średniej arytmetycznej obliczamy na podstawie wyrażenia:

$$\varepsilon_{ps} = \frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} |\varepsilon_i|. \tag{3.11}$$



Rys. 3.2. Ilustracja odchylenia standardowego dowolnego pomiaru (σ) (wyżej) i odchylenia standardowego średniej arytmetycznej (σ_s) (niżej) na osi liczbowej; czarne punkty oznaczają wartości pomiarów: x_0, x_s, x_i – wartość prawdziwa, średnia, dowolny pomiar

Obliczanie średnich, a także odchyleń standardowych jest dość pracochłonne, dlatego warto wykorzystać program komputerowy StatS (patrz rozdz. 2), żeby te, a także inne obliczenia ułatwić.



Rys. 3.3. Zależność błędu średniej arytmetycznej od liczby pomiarów

Porównując wzory (3.9) i (3.11) ze wzorami (3.5) i (3.7), widzimy, że błędy średniej arytmetycznej są $n^{1/2}$ razy mniejsze od błędów pojedynczych pomiarów i maleją ze wzrostem liczby pomiarów. Zależność błędu od liczby pomiarów ilustruje wykres na rys. 3.3. Jak wynika z wykresu, liczba pomiarów ma decydujący wpływ na błąd średniej arytmetycznej w zakresie małych wartości ($n < 10$). Zwiększenie liczby pomiarów powyżej 10–15 poprawia dokładność wyniku tylko nieznacznie, stąd w praktyce laboratoryjnej do wyznaczania średniej arytmetycznej bierzemy nie więcej niż około 10 pomiarów.

Błędy małej serii pomiarów

W praktyce często wykonujemy tylko kilka pomiarów danej wielkości ($n < 5$). Po zastosowaniu do takiej serii wzorów (3.5) i (3.9) otrzymujemy zaniżone wartości odchylenia standardowego σ i σ_s. Aby znaleźć wartości σ odpowiadające du-

żej serii pomiarów, należy pomnożyć otrzymane odchylenia przez tzw. *współczynniki Studenta-Fishera* t_n

$$\sigma = \sigma' t_n \,. \tag{3.12}$$

Wartości współczynników zależą od liczby pomiarów n oraz rodzaju obliczanego błędu. Tabela 3.1 zawiera wartości najczęściej stosowanych współczynników Studenta-Fishera dla liczby pomiarów od 2 do 7 i dla odchylenia standardowego o poziomie ufności 68,3%.

Tabela 3.1. Współczynniki Studenta-Fishera dla odchylenia standardowego średniej arytmetycznej

n	2	3	4	5	6	7
t_n	2,0	1,3	1,3	1,2	1,2	1,1

Błędy pomiarów złożonych

Omawiane dotychczas błędy dotyczyły pomiarów wielkości mierzonych bezpośrednio, jak np.: długość, temperatura czy natężenie prądu. Jednak w praktyce laboratoryjnej najczęściej wyznaczamy pewną wielkość złożoną na podstawie pomiaru kilku wielkości prostych. Błąd każdej z mierzonych wielkości wnosi pewien wkład do błędu wyniku, przy czym błędy poszczególnych wielkości prostych mogą się częściowo kompensować lub sumować. Ponieważ nie mamy możliwości oceny znaku błędów, wybieramy przypadek najmniej korzystny, tzn. taki, w którym każdy błąd cząstkowy zwiększa błąd wyniku.

Obliczanie błędu wielkości złożonych opiera się na rachunku różniczkowym. Wielkości mierzone traktujemy jako argumenty funkcji, a ich błędy jako różniczki. Oczywiście, ten sposób postępowania jest uzasadniony, gdy błędy są znacznie mniejsze od samej wartości.

Przypuśćmy, że wielkość z jest funkcją zmiennych x_1, x_2,... czyli $z = f(x_1, x_2,...)$. Różniczkę zupełną tej funkcji stanowi wyrażenie:

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots, \tag{3.13}$$

które określa przyrost wielkości z spowodowany przyrostami argumentów o dx_1, dx_2,... Wyrażenia ułamkowe są pochodnymi cząstkowymi funkcji względem odpowiedniej zmiennej. Zmieniwszy w równaniu (3.13) różniczki na błędy, otrzymujemy wzór określający *błąd maksymalny* wielkości złożonej:

$$\Delta z = \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1 \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2 \right| + \dots \tag{3.14}$$

Dzięki zastosowaniu wartości bezwzględnych wszystkie wyrazy są dodatnie, czyli wszystkie przyczynki błędów cząstkowych się sumują i obliczony błąd jest rzeczywiście maksymalny. Metodę obliczania błędów za pomocą równania (3.14) nazywamy *metodą różniczki zupełnej*.

Gdy wielkość złożona ma postać iloczynową, np.

$$z = c\, x_1^m x_2^n \cdots \tag{3.15}$$

wygodniejsze jest stosowanie *metody różniczki logarytmicznej*. Zlogarytmowanie równania (3.15) prowadzi do postaci:

$$\ln z = \ln c + m \ln x_1 + n \ln x_2 + \cdots , \tag{3.16}$$

dla której różniczkę zupełną i następnie błąd względny oblicza się bardzo prosto:

$$\Delta z = \left(\left| m \frac{\Delta x_1}{x_1} \right| + \left| n \frac{\Delta x_2}{x_2} \right| + \cdots \right) z . \tag{3.17}$$

Równanie (3.17) zawiera tylko wartości pomiarów oraz ich błędy, a nie zawiera pochodnych, więc stosowanie tej metody jest wygodniejsze niż metody różniczki zupełnej. Dlatego przed przystąpieniem do obliczania błędu wielkości złożonej warto sprawdzić, czy funkcja ma postać iloczynową.

Jako *błąd pomiaru bezpośredniego* do równań (3.14) lub (3.17) bierzemy albo błąd systematyczny (dokładność przyrządu), albo błąd przypadkowy (odchylenie standardowe średniej), w zależności od tego, który z nich został rozpoznany jako dominujący.

PRZYKŁAD 1

Wyznaczamy moment bezwładności walca o masie m i promieniu R względem osi równoległej do osi walca i odległej od niej o d.

Wyniki pomiarów bezpośrednich i ich błędy są następujące: $m = (55{,}3 \pm 0{,}1)$g, $R = (3{,}52 \pm 0{,}01)$ cm, $d = (20 \pm 0{,}1)$ cm.

Moment bezwładności obliczamy z prawa Steinera

$$I = m\left(\frac{R^2}{2} + d^2\right) . \tag{3.18}$$

Równanie nie ma postaci iloczynowej, więc musimy stosować wzór (3.14). Najpierw obliczamy odpowiednie pochodne cząstkowe:

$$\frac{\partial I}{\partial m} = \frac{R^2}{2} + d^2 ; \quad \frac{\partial I}{\partial R} = mR ; \quad \frac{\partial I}{\partial d} = 2md , \tag{3.19}$$

po czym wstawiamy je do wzoru (3.14) i uzyskujemy

$$\Delta I = \left| \Delta m \left(\frac{R^2}{2} + d^2\right) \right| + \left| m (R \Delta R + 2d \Delta d) \right| . \tag{3.20}$$

Wartość liczbowa błędu $\Delta I = 263{,}7\ \mathrm{g{\cdot}cm^2}$, a wynik pomiaru zapiszemy w postaci końcowej $I = (22460 \pm 260)\ \mathrm{g{\cdot}cm^2}$.

PRZYKŁAD 2

Wyznaczamy moduł Younga metodą ugięcia pręta na podstawie związku

$$E = \frac{l^3}{12\pi S r^4} F . \tag{3.21}$$

Wielkościami mierzonymi bezpośrednio są l, S, r, F. Równanie wyjściowe ma postać iloczynową, wiec zastosujemy metodę różniczki logarytmicznej, czyli wzór (3.17) dostosowany do aktualnych wielkości:

$$\Delta E = \left(3\frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta S}{S} + 4\frac{\Delta r}{r} + \frac{\Delta F}{F} \right) E . \tag{3.22}$$

Praktyczne uwagi dotyczące obliczania błędów

1. Błędy wielkości mierzonych bezpośrednio obliczamy stosownie do rozpoznanego rodzaju błędu (patrz rozdz. 2).
2. Przy obliczaniu wielkości złożonej mierzonej jednokrotnie błąd maksymalny obliczamy metodą różniczki zupełnej lub logarytmicznej.
3. Błędy obliczone według punktu 1 stosujemy również jako błąd pomiaru bezpośredniego w wyrażeniach na błąd wielkości złożonej (Δx w równaniach 3.14 i 3.17).
4. Jeżeli wielkość złożoną mierzymy wielokrotnie, to za wynik pomiaru przyjmujemy średnią arytmetyczną tych pomiarów.
5. Przed dalszym powtórzeniem pomiarów ($n > 2$) wielkości złożonej należy obliczyć błąd maksymalny tej wielkości według punktu 2 i sprawdzić, czy różnica między dwoma pomiarami jest większa od błędu maksymalnego. Jeżeli nie jest, zaniechać dalszych pomiarów i za miarę błędu wielkości złożonej przyjąć błąd maksymalny. Jeżeli różnica jest większa, celowe jest zwiększenie liczby pomiarów, za wynik przyjąć średnią arytmetyczną, a za błąd odchylenie standardowe średniej.

Gdy seria składa się z małej liczby pomiarów, koniecznie musimy uwzględnić współczynniki Studenta-Fishera.

4. Przedstawianie wyników

Pełną informację o wyznaczonej wielkości fizycznej mamy wówczas, gdy znamy jej wartość oraz błąd, jakim jest ona obarczona. Musimy pamiętać, że

przedstawione wyżej metody nie pozwalają na ścisłe określenie odstępstwa wyniku pomiaru od wartości rzeczywistej. Na przykład, odchylenie standardowe określa przedział wokół wartości średniej pomiaru, a prawdopodobieństwo znalezienia wartości rzeczywistej w tym przedziale wynosi 68%.

Wobec tego podawanie wyniku, a także błędu w postaci liczby wielocyfrowej jest pozbawione sensu – sens fizyczny mają co najwyżej dwie pierwsze cyfry znaczące. Obliczone wartości błędu i wyniku muszą być *zaokrąglone*. Wartość błędu zawiera przeważnie dwie cyfry znaczące[1], czasem jedną, nigdy więcej. W warunkach pracowni fizycznej będziemy stosować *procedurę zaokrąglania* przedstawioną w tabeli 4.1.

Tabela 4.1. Procedura zaokrąglania błędów i wyników

Czynność	Przykład 1	Przykład 2
1. Obliczamy wartość błędu z dużą dokładnością	$\Delta x_1 = 1932$	$\Delta x_1 = 0{,}05186$
2. Zaokrąglamy błąd do dwóch cyfr znaczących	$\Delta x_1 = 1900$	$\Delta x_1 = 0{,}052$
3. Wykonujemy próbne zaokrąglenie błędu w górę do jednej cyfry znaczącej	$\Delta x_2 = 2000$	$\Delta x_2 = 0{,}06$
4. Czy etap 3 spowodował zmianę wartości większą niż 10%; sprawdzamy nierówność $(\Delta x_2 - \Delta x_1)/\Delta x_1 > 0{,}1$	nie	tak
5. Tak – zostawiamy 2 cyfry znaczące. Nie – zostawiamy 1 cyfrę znaczącą	$\Delta x_2 = 2000$	$\Delta x_2 = 0{,}052$
6. Wynik pomiaru obliczamy przynajmniej o jedno miejsce dziesiętne dalej niż miejsce, na którym zaokrąglono błąd	$x = 26231$	$x = 0{,}3794$
7. Zaokrąglamy do tego miejsca dziesiętnego, do którego wyznaczono błąd	$x = 26000$	$x = 0{,}379$
8. Ostateczny zapis	$x = 26000 \pm 2000$	$x = 0{,}379 \pm 0{,}052$

Przy zaokrągleniu wyniku stosujemy ogólne reguły, tzn. cyfry od 1 do 4 zaokrąglamy w dół, a cyfry od 5 do 9 w górę. W tabeli 4.2 podano kilka przykładów zaokrąglania wyników i błędów.

Błędem bezwzględnym nazywamy różnicę między wartością prawdziwą a wartością uzyskaną w wyniku pomiarów.

Stosunek błędu bezwzględnego do wartości (średniej) pomiaru *nazywamy błędem względnym*

$$\varepsilon_w = \frac{x - x_{śr}}{x_{śr}}. \tag{4.1}$$

[1] Cyfry znaczące otrzymujemy przez odrzucenie zer początkowych i końcowych. Położenie przecinka dziesiętnego nie ma znaczenia. Nie mylić z cyframi po przecinku!

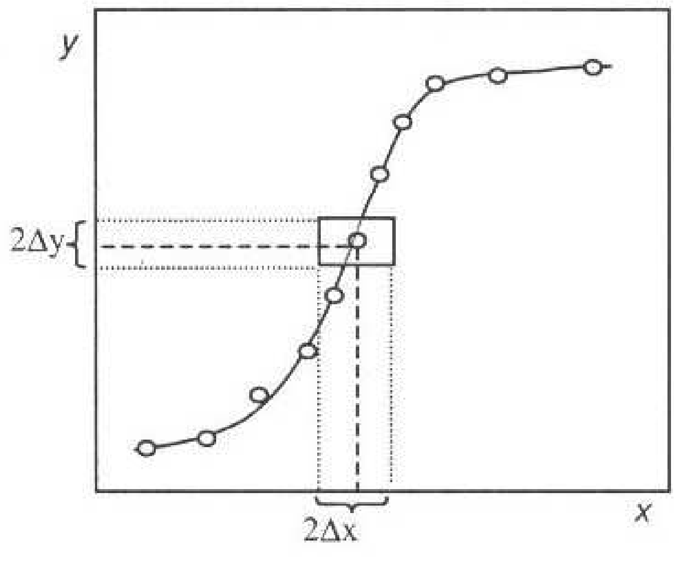
Wynik w *postaci ostatecznej* musi zawierać zaokrąglone wartości mierzonej wielkości i błędu oraz jednostki. Jako zwieńczenie pracy powinien być przedstawiony w formie uwydatnionej, np. większymi literami, w ramce czy innym kolorem, np.

$$q = (69{,}37 \pm 0{,}02)\cdot 10^{-9}\mathrm{C}.$$

Tabela 4.2. Przykłady zaokrąglania błędów i wyników

Przed zaokrągleniem	Po zaokrągleniu
$r = (225{,}173 \pm 0{,}191)$ cm	$r = (225{,}2 \pm 0{,}2)$ cm
$t = (7{,}5752 \pm 0{,}0234)$ s	$t = (7{,}575 \pm 0{,}023)$ s
$I = (93{,}311 \pm 0{,}092)\cdot 10^{-3}$ A	$I = (93{,}3 \pm 0{,}1)\cdot 10^{-3}$ A
$c = (0{,}2266 \pm 0{,}0028)$ μF	$c = (0{,}227 \pm 0{,}003)$ μF
$q = (69{,}4659 \pm 0{,}0357)\cdot 10^{-9}$C	$q = (69{,}466 \pm 0{,}036)\cdot 10^{-9}$C
$q = (69{,}3659 \pm 0{,}0187)\cdot 10^{-9}$C	$q = (69{,}37 \pm 0{,}02)\cdot 10^{-9}$C
$G = (4567893 \pm 32331)$ N	$G = (4568000 \pm 33000)$ N

Często błąd względny wyrażamy w procentach. W celu obliczenia błędu procentowego wystarczy wyrażenie (4.1) pomnożyć przez 100%. Podanie błędu względnego pozwala na szybką ocenę uzyskanego wyniku. W warunkach laboratorium fizycznego za zadowalające uznajemy wyniki obarczone błędem względnym $\varepsilon_w < 0{,}1$.



Rys. 4.1. Konstrukcja prostokąta błędu

Pełne przedstawienie wyniku w postaci graficznej musi obejmować błędy obu wielkości tworzących związek funkcyjny. Błąd punktu pomiarowego na wykresie zaznaczamy przez otoczenie go tzw. *prostokątem błędu* (rys. 4.1), którego boki są równe podwójnej wartości błędu współrzędnej. Krzywą należy w zasadzie prowadzić po naniesieniu błędów. Jeżeli pomiary są przeprowadzone prawidłowo, gładka krzywa przechodzi przez co najmniej 70% prostokątów błędów, a liczba punktów pomiarowych leżących po obu stronach krzywej jest w przybliżeniu taka sama.

Często zachodzi potrzeba porównania dwóch wyników uzyskanych różnymi metodami lub/i porównania z wartością podaną w tablicach. Takie wyniki i ich błędy maksymalne oznaczmy odpowiednio przez:

$$A_1 \pm \Delta A_1 \;\; \text{oraz} \;\; A_2 \pm \Delta A_2 . \tag{4.2}$$

Z własności błędu maksymalnego wynika, że wartość rzeczywista A_0 powinna się mieścić równocześnie w dwóch przedziałach

$$<(A_1 - \Delta A_1),\ (A_1 + \Delta A_1)> \tag{4.3}$$

$$<(A_2 - \Delta A_2),\ (A_2 + \Delta A_2)> \tag{4.4}$$

Wyniki pomiarów uznajemy za zgodne, gdy oba przedziały częściowo się przekrywają lub przynajmniej są styczne. Warunek przekrywania się przedziałów jest równoważny następującej nierówności

$$|A_1 - A_2| \leq |\Delta A_1| + |\Delta A_2| . \tag{4.5}$$

Jeżeli A_1 jest wynikiem doświadczenia, a A_2 wartością z tablic, to najczęściej błąd ΔA_2 jest znacznie mniejszy niż ΔA_1 i w przybliżeniu można przyjąć $\Delta A_2 = 0$. W tych warunkach wynik pomiaru powinien spełniać nierówność:

$$|A_1 - A_2| \leq |\Delta A_1| . \tag{4.6}$$

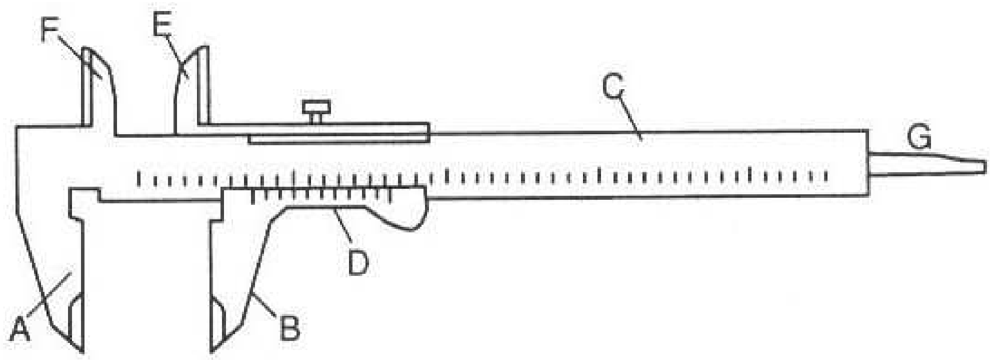
Jeżeli są spełnione nierówności (4.5) lub (4.6), to mówimy, że porównywane wyniki są zgodne.

Literatura uzupełniająca: H. Szydłowski, Pracownia fizyczna, Warszawa, PWN 1975.

5. Przyrządy do pomiaru długości

Suwmiarka

Suwmiarka jest przyrządem służącym do pomiaru niewielkich długości – do kilkunastu centymetrów – z dokładnością 0,1 lub 0,05 mm. Składa się zasadniczo ze sztabki metalowej *C* (rys. 5.1) zakończonej szczęką *A* oraz ruchomego suwaka *D*. Na części stałej jest naniesiona podziałka milimetrowa, a na suwaku znajduje się noniusz mający 10 lub 20 podziałek. Aby zmierzyć wymiar zewnętrzny jakiegoś ciała, umieszczamy je między szczękami *A* i *B*, które następnie lekko dociskamy. Do mierzenia wymiarów wewnętrznych używamy szczęk *E* i *F*, które wkładamy do mierzonego otworu i rozsuwamy do oporu. W celu pomiaru głębokości otworu opieramy sztabkę *C* na górnej krawędzi, a końcówkę *G* suwaka wsuwamy aż do oparcia się o podstawę otworu.



Rys. 5.1. Suwmiarka z noniuszem;
A, *B* – szczęki do pomiaru wymiarów zewnętrznych, *C* – część stała ze skalą główną, *D* – suwak ruchomy ze skalą noniusza, *E*, *F* – szczęki do pomiaru rozmiarów wewnętrznych, *G* – końcówka do pomiaru głębokości

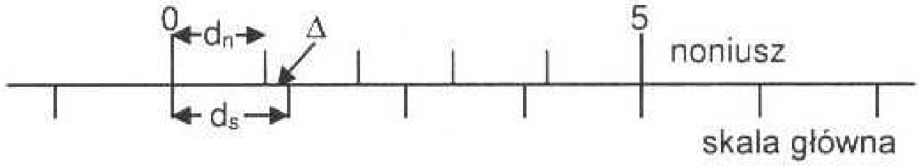
Zasadę odczytu noniusza pokazano na rys. 5.2, na którym jest widoczny fragment skali głównej i cała skala noniusza składająca się w ogólności z *N* działek (na rysunku $N = 5$). Punktem odniesienia dla skali jest zerowa działka noniusza. Wartość najmniejszej działki noniusza d_n jest tak dobrana w stosunku do najmniejszej działki skali d_s, że na całej długości noniusza składającego się z *N* działek mieści się $(N-1)$ działek skali, tzn.

$$N d_n = (N-1) d_s . \tag{5.1}$$

Z powyższego równania znajdujemy, że różnica wartości działek ($d_s - d_n = \Delta$)

$$\Delta = \frac{d_s}{N} \quad . \tag{5.2}$$

Wielkość ta jest *dokładnością odczytu* za pomocą skali z noniuszem. W dowolnym pomiarze zerowa kreska noniusza znajduje się pomiędzy kreskami skali. Jednocześnie jedna z kresek noniusza pokrywa się z pewną kreską skali.



Rys. 5.2. Zasada noniusza

Odczyt za pomocą noniusza jest dwustopniowy:

- znajdujemy wartość kreski na skali, leżącej najbliżej (ale w kierunku mniejszych wartości) zerowej kreski noniusza,
- dodajemy wartość iloczynu dokładności i numeru kreski noniusza przedłużającej skalę.

Dla suwmiarki na rys. 5.1: d_s = 1 mm, N = 10, Δ = 0,1 mm, wartość mierzona = 7,3 mm.

Noniuszy używa się przy pomiarach odległości i kątów. W praktyce używa się najczęściej noniuszy o parametrach przedstawionych w tabeli 5.1.

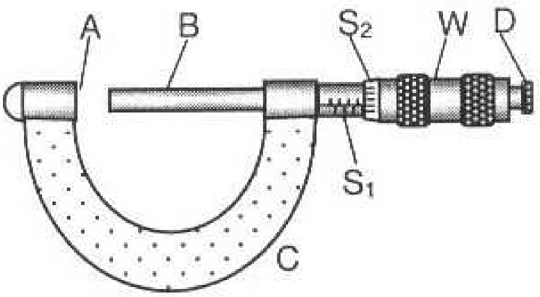
Tabela 5.1. Parametry najczęściej stosowanych noniuszy

d_s	N	Δ
1 mm	10	0,1 mm
1 mm	20	0,05 mm
30'	30	1'
15'	30	30"

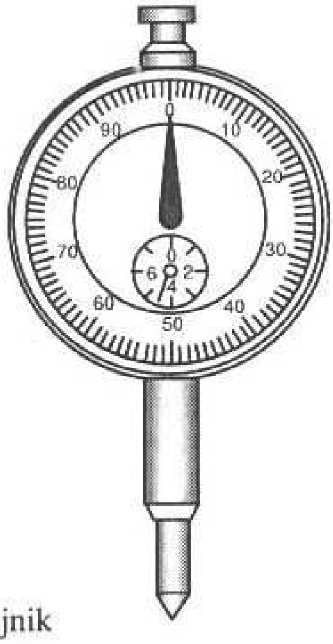
Mikromierz

Gdy zachodzi potrzeba pomiaru z dokładnością do 0,01 mm, wówczas używamy mikromierza, zwanego dawniej śrubą mikrometryczną. Mikromierz (rys. 5.3) składa się z części nieruchomej C ze skalą S_1 oraz bębenka W ze skalą S_2. Na górnej części skali S_1 są zaznaczone milimetry, a podziałki skali dolnej znajdują się w połowie między działkami górnymi. Zazwyczaj jeden pełny obrót bębenka odpowiada przesunięciu końcówki B o 0,5 mm; skala S_2 ma przedziałkę od 0 do 50.

Odczyt polega na dodaniu wskazania na bębenku do wartości największej niezasłoniętej podziałki skali nieruchomej S_1. Na przykład, gdy jest widoczna dolna kreska na prawo od działki 7 mm, a wskazanie bębenka wynosi 35, wówczas wynikiem odczytu jest wartość 7,85 mm. Zbyt silny docisk końcówki śruby do mierzonego przedmiotu może spowodować jego deformację lub uszkodzenie gwintu śruby. W obu przypadkach pomiar będzie fałszywy. W celu zapewnienia stałego docisku śrubę obracamy tylko za pomocą pokrętła *D*, które jest połączone z dalszą częścią poprzez sprzęgło wyłączające obrót śruby przy nadmiernym docisku.



Rys. 5.3. Mikromierz; *A*, *B* – końcówki, między którymi umieszcza się mierzony przedmiot, *C* – uchwyt, *D* – pokrętło sprzęgła, S_1 – skala stała, S_2 – skala ruchoma, *W* – obracany bębenek



Rys. 5.4. Czujnik mikrometryczny

Przed przystąpieniem do pomiarów należy sprawdzić wskazanie zerowe po doprowadzeniu do zetknięcia końcówek *A* i *B*. Jeśli mikromierz nie wskazuje wtedy zera, należy odczytać przesunięcie wskazania zerowego względem początku skali. Wartość tego przesunięcia musimy uwzględniać w pomiarach, dodając ją do odczytu lub odejmując od niego, zależnie od kierunku przesunięcia.

Czujnik mikrometryczny

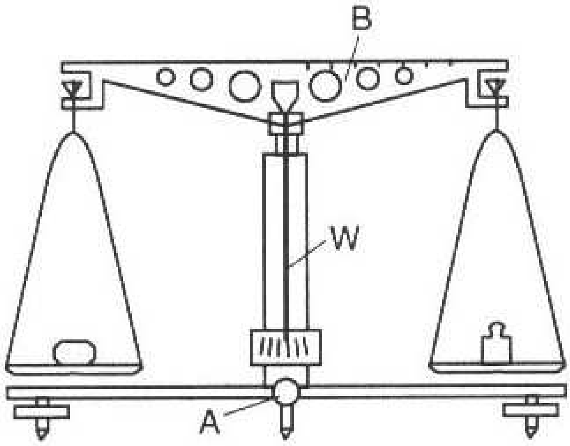
Czujnik mikrometryczny służy do pomiaru zmian długości z dokładnością 0,01 mm. Końcówka suwaka (rys. 5.4) jest dociskana przez delikatną sprężynę do powierzchni mierzonego obiektu. Przesunięcie powierzchni jest przenoszone poprzez suwak i układ kół zębatych na dwie wskazówki, z których większa wykonuje jeden obrót przy przesunięciu suwaka o 1 mm, a mniejsza – przy przesunięciu o 10 mm. Ruchoma skala umożliwia dogodne ustawienie położenia zerowego.

6. Waga laboratoryjna

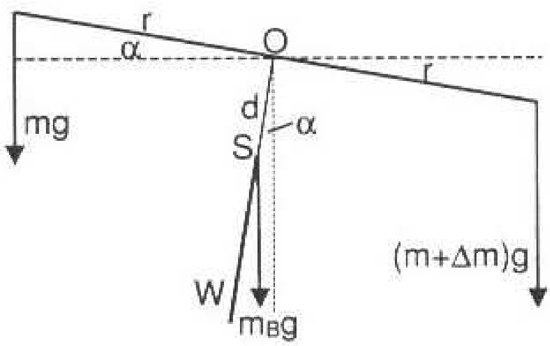
Budowa i działanie

Waga jest przyrządem służącym do wyznaczania masy lub ciężaru ciała. W wagach *sprężynowych* i *torsyjnych* wykorzystuje się właściwości sprężyste ciał, w szczególności proporcjonalność odkształcenia do działającej siły. Gdy siłą jest ciężar ciała, wówczas odkształcenie (wydłużenie lub kąt skręcenia) jest proporcjonalne również do masy. Wyznaczenie masy jest możliwe, gdy znamy wartość przyspieszenia ziemskiego, która nie jest stała, lecz zmienia się wraz z odległością od środka Ziemi. Niedogodność ta nie występuje w wagach belkowych.

Metoda pomiaru za pomocą wagi belkowej polega na porównaniu badanej masy z masą wzorcową w postaci odważników. Wynik pomiaru jest niezależny od siły grawitacji.



Rys. 6.1. Waga laboratoryjna; *A* – mechanizm aretowania, *B* – belka, *W* – wskazówka



Rys. 6.2. Siły w wadze niezrównoważonej

Budowę wagi pokazano na rys. 6.1, na którym zaznaczono główne elementy: belkę, szalki, wskazówkę, pryzmaty podpierające oraz urządzenie do aretowania. Belka i szalki są wsparte na pryzmatach z bardzo twardego materiału (często z agatu), co ogranicza do minimum wpływ tarcia i pozwala na ścisłe określenie długości ramion. Wskazówka, połączona sztywno z belką, określa jej położenie względem poziomu. Warunkiem prawidłowego działania wagi jest poziome ustawienie podstawy wagi, co uzyskujemy przez regulację dwoma przednimi nóżkami, a kontrolujemy za pomocą poziomicy lub pionu.

Wartość użytkową wagi określają dwa parametry: dokładność i czułość. Za *dokładność* wagi przyjmujemy wartość najmniejszego odważnika, a *czułością* nazywamy stosunek kąta wychylenia wskazówki do nadwagi, która to wychylenie spowodowała:

$$c = \frac{\alpha}{\Delta m}. \tag{6.1}$$

Często używa się równoważnego określenia, w którym kąt zastępuje się liczbą działek skali – a

$$c = \frac{a}{\Delta m} \,. \tag{6.2}$$

Rozpatrzmy wagę równoramienną, której ramiona są niejednakowo obciążone – na jednej szalce znajduje się masa m, a na drugiej $m + \Delta m$ (rys. 6.2). Belka wychyla się z położenia poziomego o kąt α. Zauważmy, że stan równowagi, mimo nierównych obciążeń, może istnieć tylko wtedy, gdy punkt podparcia belki O znajduje się powyżej środka ciężkości. Aby układ był w równowadze, wypadkowy *moment sił* względem punktu O musi być równy zeru. Moment siły działający na prawe ramię wynosi $(m + \Delta m)gr\cos\alpha$ i przyjmujemy go za dodatni. Dwa pozostałe momenty starają się obrócić belkę w przeciwnym kierunku, mają więc wartość ujemną: $-mgr\cos\alpha - m_B gd\sin\alpha$, gdzie d oznacza odległość osi obrotu od środka ciężkości, a m_B – masę belki. Warunek równowagi ma postać równania:

$$(m + \Delta m)gr\cos\alpha - mgr\cos\alpha - m_B gd\sin\alpha = 0 \,. \tag{6.3}$$

Dzieląc powyższe równanie przez $\cos\alpha$ i dokonując prostych przekształceń, znajdujemy tangens kąta wychylenia

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{r\Delta m}{d\, m_B} \,. \tag{6.4}$$

Gdy wychylenia są małe, możemy przyjąć, że wzór (6.4) określa także sam kąt wychylenia (gdyż w tym przypadku $\mathrm{tg}\alpha \approx \alpha$) i wykorzystać go do wyznaczenia czułości na podstawie zależności (6.1). Wykonując podstawienie, otrzymamy:

$$c = \frac{r}{d\, m_B} \,. \tag{6.5}$$

Czułość wagi jest więc proporcjonalna do długości ramion i odwrotnie proporcjonalna do masy belki oraz odległości punktu podparcia od środka ciężkości. We współczesnych wagach stosuje się dość krótkie belki z lekkich stopów aluminium. Dzięki takiej konstrukcji wagi są wygodne w użyciu (niewielkie wymiary) i wystarczająco czułe (korzystny stosunek długości belki do jej masy).

Gdyby belka była podparta w środku ciężkości ($d = 0$), wówczas – jak wynika ze wzoru (6.5) – jej czułość byłaby nieskończenie duża. Taka waga byłaby nieprzydatna, gdyż każda różnica mas powodowałaby przechylenie belki do położenia pionowego!

Każdą wagę można obciążyć tylko do pewnej granicy, powyżej której elementy konstrukcyjne ulegają odkształceniu, a wyniki pomiaru stają się błędne.

Do każdej wagi należy komplet *odważników* o wartościach tworzących sekwencję: 1, 2, 2, 5. Najmniejszy odważnik ma najczęściej wartość 10 mg. Większą dokładność mają wagi *analityczne* umieszczone w specjalnych obudowach i mające tłumienie powietrzne wahań. Ich dokładność wynosi od 0,1 mg do 0,01 mg.

Ważenie

Posługiwanie się wagą i uzyskiwanie prawidłowych wyników wymaga przestrzegania kilku reguł.

Wszelkie manipulacje wykonywane na szalkach wagi, a więc nakładanie odważników, umieszczanie ciała ważonego itp., należy wykonywać na wadze zaaretowanej. Zasada aretowania sprowadza się do zdjęcia belki i szalek z pryzmatów i oparcia ich na specjalnych podstawkach unieruchamiających. Do aretowania służy pokrętło A, które należy obracać łagodnym ruchem.

Szafkę wagi należy otwierać tylko w razie potrzeby, w ten sposób unikamy szkodliwych wpływów prądów powietrza i zmian temperatury. Do nakładania odważników wystarczy otworzyć ściankę szafki do połowy. Nakładanie i zdejmowanie odważników należy wykonywać za pomocą specjalnych szczypczyków, stanowiących wyposażenie wagi.

Czynność ważenia rozpoczynamy od wypoziomowania wagi, sprawdzenia czystości szalek i ustawienia położenia zerowego wskazówki. Gdy środek wahań wagi nieobciążonej nie pokrywa się ze środkiem skali, wówczas przesuwamy środek ciężkości jednej z szalek przez odpowiednie pokręcenie poziomych śrub znajdujących się na końcach lub w środku belki.

Badane ciało umieszczamy na lewej szalce, a odważniki nakładamy na szalkę prawą. Następnie znajdujemy najmniejszy odważnik powodujący nadwagę, po czym zastępujemy go odważnikiem o połowę mniejszym i dokładamy mniejsze odważniki, aż do ponownego uzyskania kolejnej nadwagi. W ten sposób postępujemy, aż do użycia najmniejszego odważnika z kompletu.

W celu osiągnięcia dokładności większej niż wartość najmniejszego odważnika, stosujemy *metodę interpolacji,* w której uwzględniamy położenie wskazówki. Metoda ta wymaga precyzyjnego ustalenia *położenia zerowego*. Przypuśćmy, że po odaretowaniu wychylenie wskazówki w prawo wynosi p_1, w lewo – l_1 i drugie w prawo – p_2. *Środek wahań* obliczamy według wzoru:

$$S_0 = \frac{\frac{p_1 + p_2}{2} + l_1}{2} = \frac{p_1 + p_2 + 2l_1}{4} \ . \tag{6.6}$$

Jeżeli skala wagi ma zero w środku, to wychylenie w lewo przyjmujemy za ujemne, a wychylenie w prawo – za dodatnie. W podobny sposób wyznaczamy

środek wahań S_- przy najmniejszej niedowadze. Różnica $S_0 - S_-$ jest proporcjonalna do różnicy między masą odważników a masą ciała

$$x \propto S_0 - S_- . \tag{6.7}$$

Następnie dokładamy najmniejszy odważnik powodujący nadwagę, co spowoduje przesunięcie wskazówki z położenia S_- do położenia S_+ (oba położenia są środkami wahań!). Różnica obu wartości jest oczywiście proporcjonalna do masy Δm odważnika powodującego nadwagę, czyli

$$\Delta m \propto S_+ - S_- . \tag{6.8}$$

Na podstawie równań (6.7) i (6.8) znajdujemy dodatek do masy odważników dających wynik z niedomiarem

$$x = \frac{S_0 - S_-}{S_+ - S_-} \Delta m . \tag{6.9}$$

Podobnie jak we wzorze (6.6) wartości S mają różne znaki, zależnie od położenia względem wartości zerowej skali. Wartość x zaokrąglamy do jednego miejsca znaczącego. Ostateczny wynik pomiaru masy z zastosowaniem metody interpolacji obliczamy ze wzoru

$$m = m_- + \frac{S_0 - S_-}{S_+ - S_-} \Delta m , \tag{6.10}$$

gdzie: m_- jest masą odważników dających najmniejszą niedowagę, a Δm – masą odważnika powodującego nadwagę.

Powyższa metoda pozwala na wyznaczenie wartości masy z dokładnością przewyższają o rząd masę najmniejszego odważnika.

W wagach analitycznych *automatycznych* nakładanie odważników odbywa się przez obrót odpowiedniego pokrętła, a w wagach *półautomatycznych* odważniki większe nakłada się ręcznie, mniejsze – automatycznie. Miejsca określające wartości mniejsze niż 10 mg wyznacza się z wychylenia wskazówki odczytywanego za pomocą precyzyjnego układu optycznego.

7. Ultratermostat

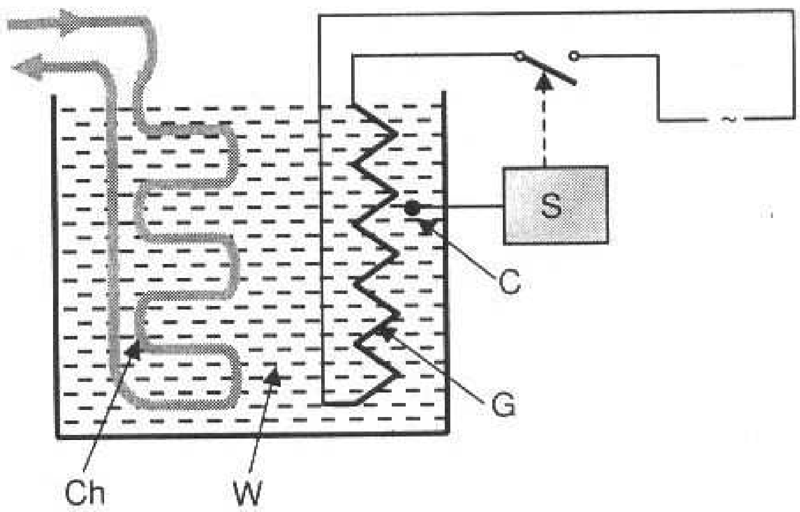
W wielu pomiarach fizycznych konieczne jest utrzymanie ciała lub ośrodka w temperaturze różnej od temperatury otoczenia. Do automatycznej regulacji temperatury stosujemy często ultratermostat – urządzenie, w którym ciepło jest dostarczane do układu, gdy jego temperatura jest niższa od wymaganej.

Ultratermostat zawiera następujące elementy (patrz rys. 7.1):

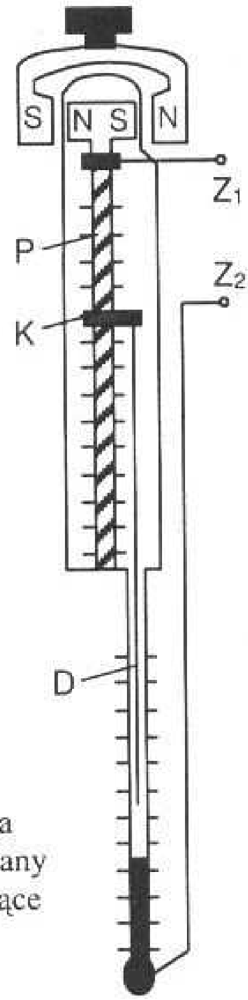
- zbiornik z cieczą termostatowaną,
- grzejnik sterowany, grzejnik dodatkowy,
- chłodnicę,
- czujnik temperatury (termometr kontaktowy, termistor, dioda itp.),
- układ sterujący,
- pompę mieszająco-tłoczącą.

Zbiornik cieczy może być połączony z urządzeniem zewnętrznym, do którego przepływ cieczy umożliwia pompa napędzana silnikiem elektrycznym.

Układ sterujący pracą grzejnika otrzymuje informację o aktualnej temperaturze z czujnika i powoduje włączenie grzejnika, gdy temperatura jest niższa od wymaganej, lub wyłączenie grzejnika, gdy temperatura osiągnęła wymaganą wartość. Podstawową cechą czujnika musi być silna zależność jego właściwości (np. długości, oporu elektrycznego) od temperatury.



Rys. 7.1. Schemat termostatu; *S* – układ sterujący, *C* – czujnik temperatury, *G* – grzejnik, *W* – płyn termostatowany, *Ch* – chłodnica



Rys. 7.2. Termometr kontaktowy; *D* – drucik kontaktowy, *K* – nakrętka przesuwana wzdłuż gwintowanego pręta *P* poprzez jego obrót spowodowany ręcznym obracaniem zewnętrznych magnesów *N*-*S*, Z_1, Z_2 – zaciski łączące z przekaźnikiem obwodu grzejnego

Jednym ze stosowanych czujników temperatury jest *termometr kontaktowy*, którego budowę przedstawiono i zasadę działania wyjaśniono na rys. 7.2. Dolna część kapilary pełni funkcję termometru, natomiast górna jest rozszerzona i mieści się w niej śruba *P*, na której znajduje się nakrętka *K*, a ta z kolei jest połączona z drucikiem *D*. Przy obrocie śruby nakrętka wykonuje ruch postępowy w górę lub

w dół, zmieniając tym samym położenie końca drucika względem poziomu rtęci. Gdy koniec drucika dotknie rtęci, zostanie zamknięty obwód elektryczny między zaciskami Z_1 i Z_2.

Górny koniec śruby jest zaopatrzony w mały magnes, który może być obracany za pomocą większego magnesu zewnętrznego. Pokręcając magnesem, ustawiamy nakrętkę na określoną wartość temperatury, przy której słupek rtęci znajduje się na poziomie końca drucika, co powoduje zamknięcie obwodu.

Zaciski Z_1Z_2 są dołączone do przekaźnika, który włącza grzejnik, gdy termometr jest rozwarty, i wyłącza grzejnik, gdy obwód termometru się zamyka. Wyłączanie i włączanie grzejnika następuje przy nieco innych wartościach temperatury – różnica ta nazywa się *nieczułością regulacji* i powinna być jak najmniejsza. Chcąc prędzej osiągnąć wymaganą temperaturę, należy włączyć grzejnik dodatkowy. Ponieważ nie reaguje on na termometr kontaktowy, trzeba go wyłączyć ręcznie przed osiągnięciem żądanej temperatury.

W celu obniżenia temperatury cieczy termostatującej opuszczamy nakrętkę (wskaźnik termometru kontaktowego) do żądanej wartości – grzejnik zostaje w ten sposób wyłączony – i przepuszczamy strumień zimnej wody z kranu przez spiralną chłodnicę zanurzoną w cieczy. Oczywiście, najniższą temperaturą, jaką możemy w ten sposób osiągnąć, jest temperatura wody chłodzącej. Poprawną regulację temperatury niewiele wyższej od pokojowej osiąga się przez jednoczesne włączenie układu automatycznego podgrzewania i obiegu zimnej wody wodociągowej przez chłodnicę.

8. Potencjometr i autotransformator

Podstawowymi źródłami prądu są: sieć prądu przemiennego, ogniwa galwaniczne i akumulatory.

Napięcie prądu przemiennego zmienia się w czasie według wzoru: $U = U_0 \sin 2\pi f t$, gdzie częstotliwość $f = 50$ Hz, a amplituda $U_0 = 324$ V. Bardziej użytecznym parametrem jest *napięcie skuteczne* U_s, które jest mniejsze od maksymalnego o czynnik 1,41 i wynosi 230 V.

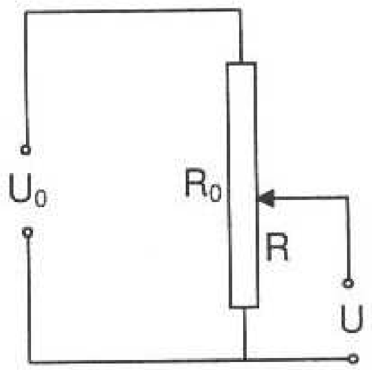
Ogniwa galwaniczne i akumulatory są źródłami prądu stałego. Siła elektromotoryczna pojedynczej celi akumulatora ołowiowego wynosi 2,2 V, a SEM różnych typów ogniw wynosi od 1,0 V do 2,5 V.

W laboratorium fizycznym często jest potrzebne regulowanie napięcia w sposób płynny lub skokowy. Najprostszym przyrządem służącym do tego celu jest *potencjometr*, którego schemat przedstawiono na rys. 8.1. Do końców opornika R_0 dołączamy źródło napięcia U_0, w wyniku czego przez opornik płynie prąd

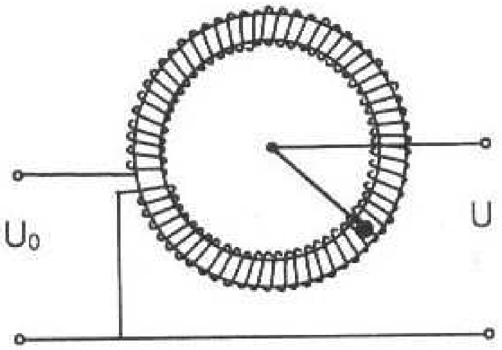
$i = U_0/R_0$. Spadek potencjału na części opornika, której opór wynosi R, jest iloczynem prądu i tego oporu, a więc:

$$U = \frac{R}{R_0} U_0 \ . \tag{8.1}$$

Zmieniając położenie suwaka (na rysunku – kontakt zakończony strzałką) możemy otrzymać napięcie U w zakresie od 0 do U_0.



Rys. 8.1. Potencjometr



Rys. 8.2. Autotransformator

Oprócz potencjometrów z płynnym ruchem suwaka spotyka się potencjometry z regulacją skokową; nazywają się one *dzielnikami napięcia*.

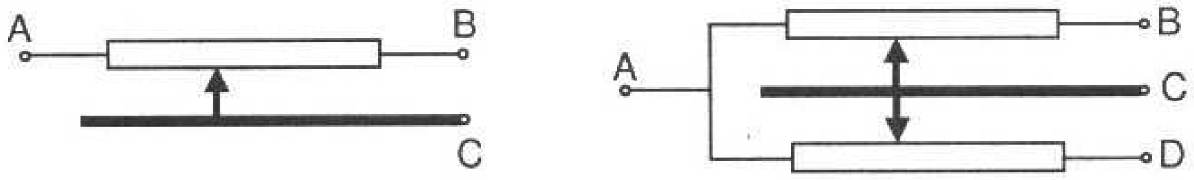
Potencjometry mogą służyć do regulacji napięcia stałego i zmiennego. Ich niekorzystną cechą jest pobieranie prądu, czasem znacznie większego niż prąd właściwego odbiornika.

Do regulacji napięcia zmiennego używamy często *autotransformatora*. Budowę tego przyrządu pokazano na rys. 8.2. Na pierścieniowym rdzeniu jest nawinięte jednowarstwowe uzwojenie, do którego końców dołączamy źródło prądu zmiennego. Napięcie obniżone zbiera się z autotransformatora za pomocą suwaka w taki sposób jak w potencjometrze. Opór uzwojenia jest oporem indukcyjnym i występuje tylko dla prądu zmiennego. Załączenie napięcia stałego spowodowałoby przepływ dużego prądu i spalenie uzwojenia.

9. Oporniki regulowane

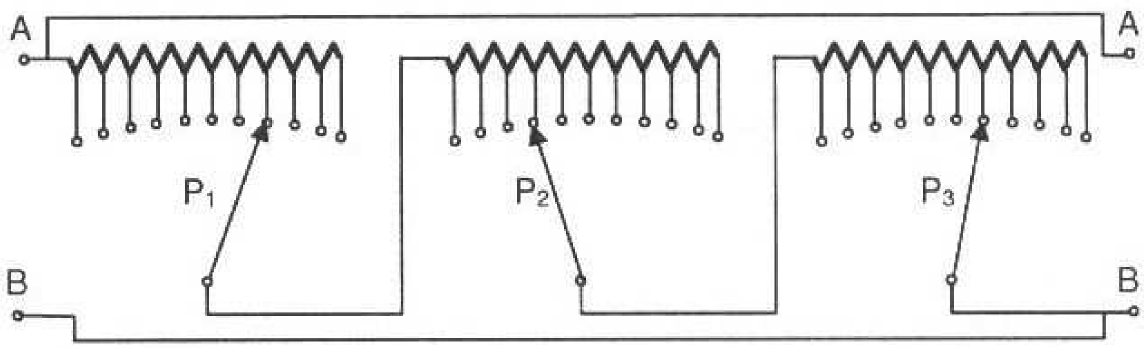
Oporniki suwakowe mają uzwojenie z drutu oporowego nawinięte na rdzeń ceramiczny. Końce uzwojenia są doprowadzone do zacisków znajdujących się na zewnętrznej stronie obudowy. Również na zewnątrz znajduje się uchwyt i zacisk suwaka, tj. kontaktu przesuwającego się wzdłuż uzwojenia. Gdy dołączymy do obwodu elektrycznego zaciski A i C (rys. 9.1), prąd popłynie przez część uzwojenia między zaciskiem A i suwakiem, a następnie przez szynę suwaka, której opór

jest bardzo mały, do zacisku *C*. Oczywiście, po załączeniu zacisków *B* i *C* „czynny" jest opór uzwojenia od punktu *B* do suwaka.



Rys. 9.1. Oporniki suwakowe: pojedynczy (po lewej) i podwójny (po prawej)

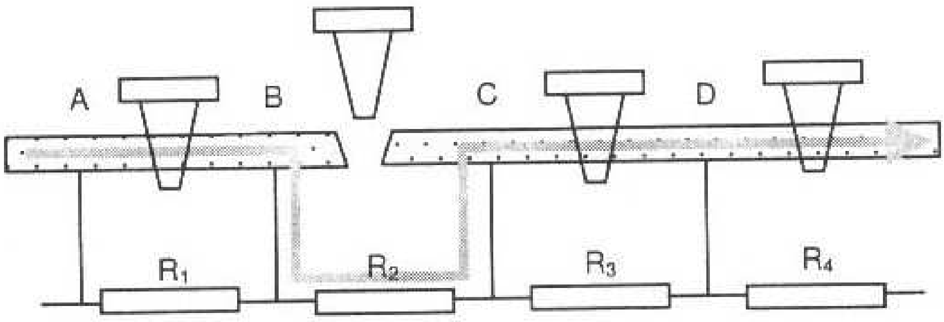
Na rysunku 9.1 przedstawiono także schemat opornika mającego dwa uzwojenia, które możemy wykorzystywać każde osobno lub oba łącznie. Zakończenie zaciskami obu końców uzwojenia oporowego pozwala na stosowanie oporników suwakowych jako potencjometrów.



Rys. 9.2. Opornik dekadowy

Opornik dekadowy składa się z wielu oporników drutowych połączonych w taki sposób, że można wybrać dowolną wartość, od najmniejszego pojedynczego opornika do sumy wszystkich. Wartości w kolejnych dekadach różnią się o czynnik 10. Sposób połączeń w oporniku 3-dekadowym przedstawiono na rys. 9.2. Opór pojedynczej dekady wybieramy za pomocą przełącznika *P* obracanego pokrętłem zaopatrzonym we wskaźnik wartości od 0 do 9 (lub 10 – w niektórych konstrukcjach). Opór całkowity jest sumą wszystkich dekad. Obwód zewnętrzny dołącza się do zacisków *A* i *B* zamieszczonych na obu końcach opornika.

Opornik zatyczkowy jest układem szeregowo połączonych oporników drutowych, z których każdy może być wyłączony z obwodu przez zwarcie jego końców specjalną zatyczką. Zasadę budowy opornika zatyczkowego przedstawiono na rys. 9.3. Wszystkie oporniki drutowe są połączone szeregowo na wspólnej szynie miedzianej, której opór jest bardzo mały. Między końcówkami poszczególnych oporników szyna ma przerwy w postaci stożkowych otworów zamykanych dopasowanymi zatyczkami metalowymi.



Rys. 9.3. Opornik zatyczkowy

Gdy zatyczka znajduje się w otworze, zwiera ona odpowiedni opornik i opór odcinka (np. *A—B* na rys. 9.3) jest równy zeru. Gdy zatyczka jest wyjęta, prąd musi płynąć przez odpowiedni opornik (np. R_2 na rys. 9.3). Wartość włączonego tym sposobem oporu jest zaznaczona na płycie obok otworu. Aby zatyczki nie wprowadzały dodatkowego oporu, powinny być mocno wciśnięte. Oporniki na ogół są uporządkowane dekadami. Cały włączony opór obliczamy, sumując wszystkie wartości odpowiadające wyjętym zatyczkom. Obok przerwy w szynie znajdują się otwory pomocnicze, które nie stanowią przerwy w obwodzie elektrycznym szyny i które służą do wstawiania wolnych zatyczek.

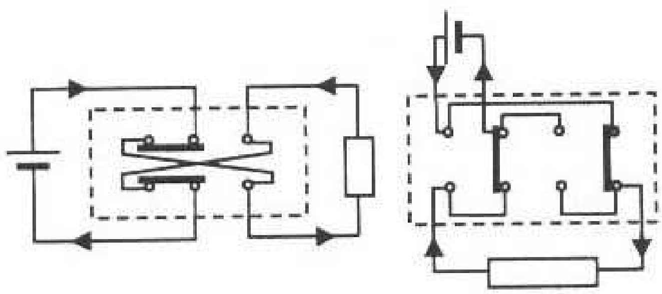
10. Przełączniki

Dla wygody pomiarów używa się przełączników, za pomocą których możemy obwód łatwo zamknąć lub otworzyć, zmienić kierunek prądu, a także zamieniać elementy wchodzące w skład obwodu.

Budowę najczęściej używanych typów przełączników 2-położeniowych przedstawiono na rys. 10.1, a ich zastosowanie do zmiany kierunku prądu – na rys. 10.2.



Rys. 10.1. Przełączniki 2-pozycyjne: a) 4-punktowy, b) 6-punktowy i c) 8-punktowy; grube odcinki pokazują połączenia wewnętrzne punktów dla jednej pozycji, odcinki przerywane – dla drugiej



Rys. 10.2. Zmiana kierunku prądu za pomocą przełączników

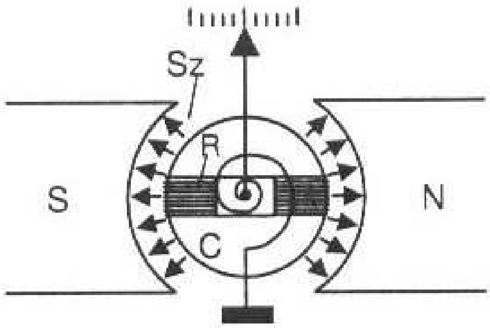
11. Mierniki elektryczne

Mierniki magnetoelektryczne

Podstawową częścią miernika (rys. 11.1) jest ramka, złożona ze zwojów cienkiego drutu miedzianego, oraz magnes. Ramka jest osadzona na osi w łożyskach i może się obracać w szczelinie. Dla zwiększenia indukcji magnetycznej we wnętrzu ramki umieszcza się nieruchomy rdzeń, który ponadto skupia linie indukcji, dzięki czemu rozkład indukcji w szczelinie jest prawie radialny.

Mierzony prąd dopływa do cewki przez sprężynki spiralne, w których po skręceniu powstaje moment siły sprężystości (M_s) proporcjonalny do kąta skręcenia (φ)

$$M_s = -k\varphi . \qquad (11.1)$$



Rys. 11.1. Zasadnicze elementy miernika magnetoelektrycznego – N, S – bieguny magnesu stałego, C – rdzeń magnetyczny (nieruchomy), R – ramka z nawiniętym uzwojeniem

W polu magnetycznym o indukcji B na ramkę działa moment siły elektrodynamicznej

$$M_e = I B S n , \qquad (11.2)$$

gdzie: I – natężenie prądu, S – powierzchnia przekroju ramki, n – liczba zwojów ramki.

Oba momenty M_s i M_e działają przeciwnie, co powoduje, że wychylenie ramki ustali się wtedy, gdy $M_s - M_e = 0$. Z warunku równowagi momentów wynika, że kąt wychylenia ramki jest proporcjonalny do natężenia prądu, czyli

$$I = A\varphi . \qquad (11.3)$$

Z równania (11.3) wynika, że skala miernika magnetoelektrycznego jest liniowa.

Mierniki elektrodynamiczne

Zasada budowy mierników elektrodynamicznych jest podobna do opisanej wyżej zasady budowy mierników magnetoelektrycznych. Różnica polega na zastąpieniu magnesu trwałego elektromagnesem. Indukcja magnetyczna (B) wytwarzana przez elektromagnes jest proporcjonalna do natężenia prądu (I_1) płynącego przez jego uzwojenie

$$B = k_1 I_1 . \qquad (11.4)$$

W tej sytuacji moment siły elektrodynamicznej jest proporcjonalny zarówno do prądu cewki I_2, jak i do prądu elektromagnesu:

$$M_e = k_1' I_1 I_2 . \tag{11.5}$$

Podobnie, do iloczynu obu prądów jest proporcjonalny kąt wychylenia. Gdy przez elektromagnes i przez cewkę płynie ten sam prąd ($I_1 = I_2 = I$), wówczas wychylenie jest proporcjonalne do kwadratu natężenia prądu

$$\varphi \propto I^2 . \tag{11.6}$$

Zatem skala miernika elektrodynamicznego jest nieliniowa – podziałki stają się rzadsze ze wzrostem wychylenia.

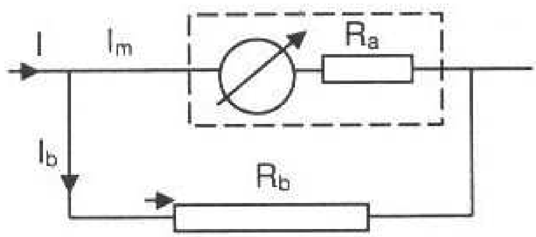
Zmiana zakresu amperomierza

Opisane wyżej mierniki służą do pomiaru natężenia prądu. Ze względu na zakres dzielimy je na amperomierze, miliamperomierze, mikroamperomierze i galwanometry. Te ostatnie są miernikami najczulszymi – stosuje się je do pomiarów prądu o natężeniu $10^{-6} - 10^{-11}$ A.

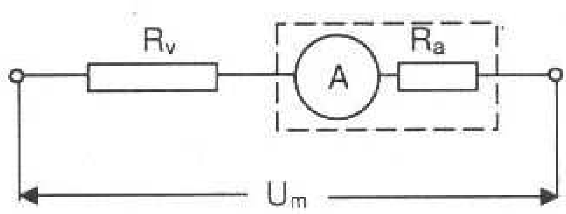
Umieszczenie amperomierza w obwodzie nie powinno powodować zmiany wartości płynącego prądu, wobec czego opór cewek (opór wewnętrzny) powinien być bardzo mały.

Dla każdego miernika jest określony prąd maksymalny, którego przekroczenie powoduje wydzielanie się ciepła w cewce pomiarowej prowadzące do uszkodzenia uzwojenia. Z prądem maksymalnym jest związany zakres pomiarowy miernika.

Prąd mierzony może wielokrotnie przekroczyć wartość maksymalną (oznaczmy ją przez I_m), jeżeli równolegle do zacisków amperomierza dołączymy odpowiedni opornik, tzw. *bocznik* (rys. 11.2). Obliczmy, jaki bocznik musimy zastosować, aby zwiększyć zakres prądu n razy, tzn. aby $I = nI_m$.



Rys. 11.2. Bocznikowanie amperomierza



Rys. 11.3. Opór wewnętrzny woltomierza

Na podstawie II prawa Kirchhoffa znajdujemy proporcję

$$\frac{R_a}{R_b} = \frac{I_b}{I_m} , \tag{11.7}$$

gdzie R_a jest oporem wewnętrznym amperomierza, R_b – oporem bocznika.

Zgodnie z I prawem Kirchhoffa $I_b = nI_m - I_m = I_m(n-1)$. Uwzględniwszy powyższy związek we wzorze (11.7), możemy obliczyć opór bocznika.

$$R_b = \frac{R_a}{n-1}. \tag{11.8}$$

Zatem w celu n-krotnego zwiększenia zakresu należy zastosować bocznik o oporze $(n-1)$ razy mniejszym niż opór wewnętrzny amperomierza. W *miernikach wielozakresowych* boczniki są wbudowane wewnątrz, a ich włączanie odbywa się za pomocą przełączników wielopozycyjnych.

Woltomierz

Dowolny przyrząd mierzący prąd możemy dostosować do pomiaru napięcia, dołączając do niego szeregowo odpowiedni, duży opór. Przypuśćmy, że prąd maksymalny amperomierza w dalszym ciągu wynosi I_m i że chcemy otrzymać woltomierz o zakresie U_m. W tym celu musimy dodać szeregowo do amperomierza taki opór R_w (rys. 11.3), aby przy napięciu U_m płynący prąd był równy I_m:

$$I_m = \frac{U_m}{R_w + R_a}, \tag{11.9}$$

skąd obliczamy opór woltomierza

$$R_w = \frac{U_m}{I_m} - R_a. \tag{11.10}$$

Prąd płynący w gałęzi woltomierza, który włączamy równolegle ze źródłem lub innym elementem obwodu, powinien być jak najmniejszy. Osiągamy to przez zastosowanie czułego mikroamperomierza połączonego z dużym oporem.

Mierniki elektroniczne

Względnie nową grupę przyrządów stanowią mierniki elektroniczne, w których działaniem podstawowym jest pomiar napięcia przez porównanie go z napięciem wzorcowym. Opór wewnętrzny tych przyrządów jest bardzo duży (sięga 10^{11} omów), dzięki czemu mają one niezwykle szerokie zastosowanie. W wielu typach przyrządów wynik jest podawany w postaci cyfrowej, co bardzo ułatwia odczyt i zwiększa jego dokładność.

Wobec przyjętego przez producentów zwyczaju opisywania pokręteł regulacyjnych i przełączników w języku angielskim należy zapamiętać znaczenie częściej stosowanych określeń:

main, power	–	wyłącznik główny
range	–	zakres
delay	–	opóźnienie, odstęp czasowy między kolejnymi odczytami
start	–	odczyt wartości mierzonej tylko w chwili naciśnięcia przycisku
auto	–	pomiar ciągły
coarse/fine	–	regulacja zgrubna/precyzyjna

12. Zastosowanie komputera w pomiarach

Wprowadzenie

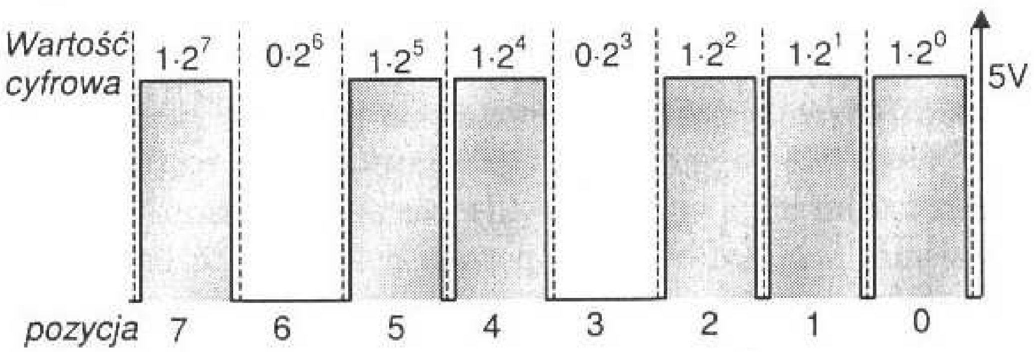
Właściwości komputerów, w tym również osobistych, umożliwiły ich bardzo szerokie zastosowanie do pomiarów różnych wielkości fizycznych. Szczególnie pożyteczne są takie właściwości, jak szybkość wykonania pomiaru, łatwość wielokrotnego powtarzania, magazynowania i przetwarzania zmierzonych danych.

Komputer jest urządzeniem cyfrowym, tzn. wykonuje operacje na wielkościach skwantowanych – przyjmujących tylko określone wartości, które mogą się różnić o wielokrotność pewnej stałej. Przeciwieństwem wielkości kwantowej jest wielkość ciągła, zwana również analogową, która może przyjmować dowolne wartości, a różnica między różnymi wartościami może być dowolnie mała.

PRZYKŁAD

Liczba całkowita jest wielkością cyfrową. Zakres liczb całkowitych od 0 do 10 zawiera tylko 11 wartości, a najmniejsza różnica między nimi wynosi 1. Liczba rzeczywista natomiast stanowi wielkość ciągłą. W takim samym zakresie [0,10] znajduje się nieskończona liczba wartości, np. 3,1415927 i 3,1415928, które mogą być dowolnie bliskie sobie.

W komputerze, a także w innych urządzeniach cyfrowych wielkość cyfrowa jest reprezentowana przez ciąg impulsów napięciowych, które mogą przyjmować tylko dwie wartości: 0 V i 5 V. Z tych impulsów tworzy się liczbę całkowitą w ten sposób, że impulsowi 0 V przypisuje się wartość 0, a impulsowi 5 V – wartość 2^n, przy czym wykładnik n oznacza pozycję danego impulsu w ciągu. Tworzenie wartości cyfrowej za pomocą ośmiu impulsów przedstawiono na rys. 12.1.



Rys. 12.1. Tworzenie wartości cyfrowej z ciągu impulsów prostokątnych; każdemu impulsowi przypisuje się wartość $i{\cdot}2^n$ ($i = 0$ dla napięcia 0 V, $i = 1$ dla napięcia 5 V, n – pozycja impulsu). Całkowita wartość reprezentowana na rysunku wynosi 183 (w zapisie dziesiętnym) lub 10110111 (w zapisie dwójkowym)

Żeby zastosować komputer do celów pomiarowych, musimy do niego dostarczyć sygnał cyfrowy, a tymczasem wszystkie wielkości fizyczne są wielkościami

ciągłymi. Dostosowanie różnych wielkości fizycznych do formy cyfrowej wymaga dwóch transformacji:

- zamiany danej wielkości na napięcie elektryczne,
- przetworzenia napięcia (analogowego) na wartość cyfrową za pomocą tzw. przetwornika analogowo-cyfrowego.

Przetwornik analogowo-cyfrowy, oprócz swojej zasadniczej funkcji, ma także funkcję zliczania czasu.

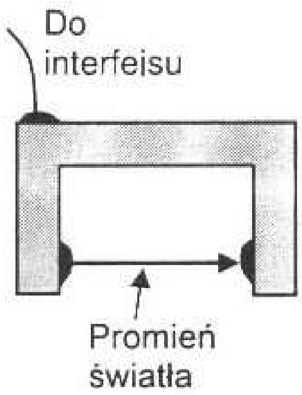
Komputerowy zestaw pomiarowy

W Pracowni Fizycznej Politechniki Poznańskiej jest używany system pomiarowy o nazwie *Science Workshop*. System składa z trzech głównych elementów, które kolejno przetwarzają informacje, jak pokazano na poniższym schemacie.



Stosowane są czujniki dwóch rodzajów – analogowe i cyfrowe. *Czujnik analogowy* wytwarza napięcie proporcjonalne do wielkości fizycznej. Na przykład, czujnik temperatury wytwarza napięcie proporcjonalne do temperatury – w temperaturze 0°C wytwarza napięcie 0 V; gdy temperatura wynosi 10°C, napięcie jest równe 0,1 V, a w temperaturze 100°C – 1 V. Analogowe napięcie z czujnika jest przetwarzane przez interfejs na sygnał cyfrowy, który z kolei jest przekazywany do komputera.

Czujnik cyfrowy wytwarza innego rodzaju sygnał. Wytwarza on tylko dwie wartości napięcia – 5V i 0 V. Przykładem takiego czujnika jest tzw. fotobramka przedstawiona schematycznie na rys. 12.2. Na jednym z ramion bramki znajduje się źródło światła, a na drugim – detektor, który pod wpływem oświetlenia wytwarza napięcie 5 V. Zasłonięcie promienia powoduje spadek sygnału do wartości 0 V.



Rys. 12.2. Fotobramka

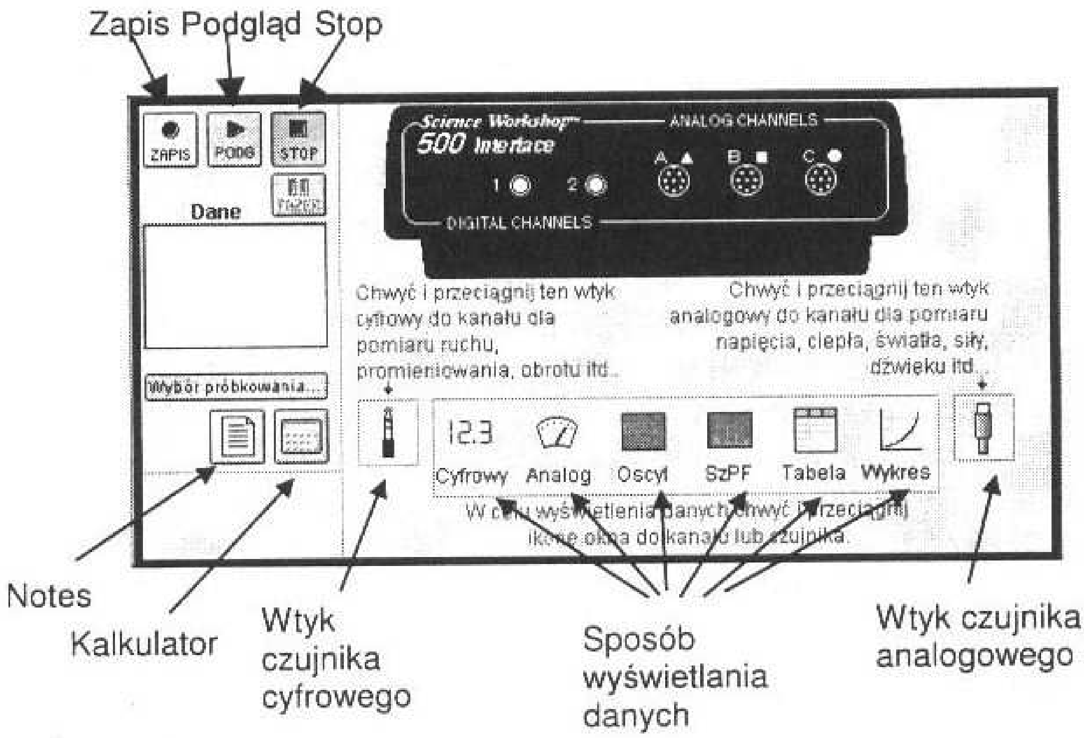
Fotobramka może być użyta do pomiaru czasu przechodzenia jakiegoś obiektu lub odstępu czasu między przejściami dwóch obiektów. Dokładność pomiaru czasu wynosi 0,0001 s, czyli 0,1 ms.

Interfejs jest urządzeniem, które z jednej strony jest połączone z czujnikiem, a z drugiej – z komputerem. Ściana czołowa interfejsu jest widoczna na rys. 12.3 jako ciemny element w górnej części rysunku. Na ścianie czołowej znajdują się gniazda do podłączenia czujników cyfrowych, oznaczone 1 i 2, oraz gniazda do czujników analogowych *A*, *B*, *C*. Przed rozpoczęciem pomiarów do interfejsu musimy dołączyć odpowiedni do danego pomiaru czujnik. Oprócz fizycznego połączenia ko-

nieczne jest „poinformowanie" o tym programu przez wskazanie, który czujnik został przyłączony i do którego wejścia (kanału). Dokonuje się to przez wciśnięcie klawisza myszki, gdy kursor wskazuje wtyk czujnika, i przeciągnięcie kursora do odpowiedniego gniazda interfejsu.

Program obsługi pomiaru

Wykonanie pomiaru z użyciem komputera wymaga odpowiedniego oprogramowania, które umożliwia m.in. rozpoczęcie i zakończenie pomiaru, określenie potrzebnych parametrów, wykonanie obliczeń czy przedstawienie wyników. Użytkownik komunikuje się z komputerem za pomocą przycisków, list wyboru i okienek do wpisywania danych. Elementy komunikacyjne są dostosowane do aktualnej sytuacji procesu pomiarowego.



Rys. 12.3. Okno ustawień

Na rysunku 12.3 przedstawiono *okno ustawień* po włączeniu programu. Oprócz wymienionych już wtyków czujników i gniazdek do nich jest widoczny zestaw możliwych sposobów przedstawiania wyników pomiarów. Możliwe jest także wywołanie na ekranie kalkulatora i notatnika.

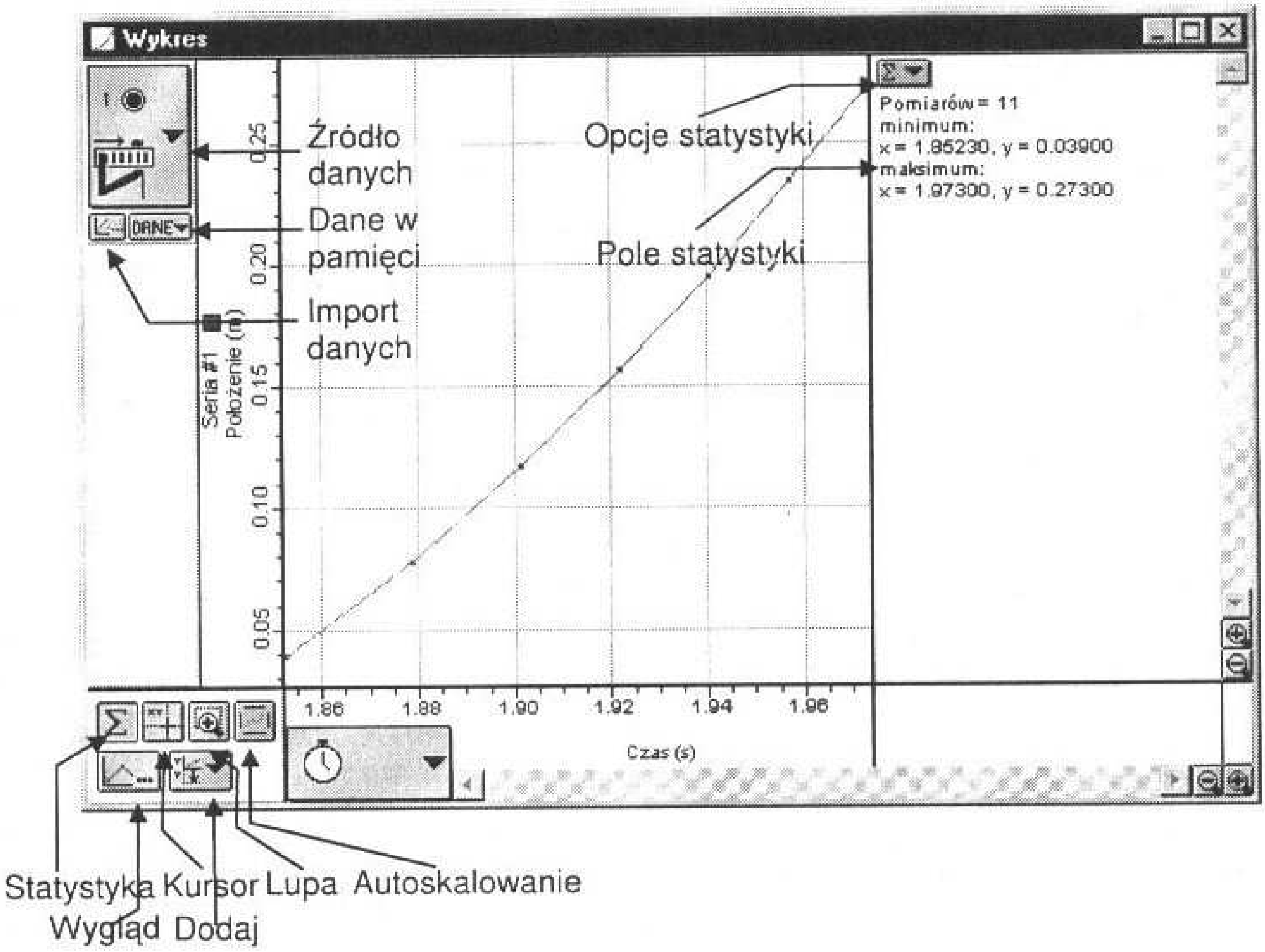
W lewym górnym rogu znajdują się przyciski sterowania przebiegiem pomiaru – `Zapis`, `Podgląd` i `Stop`.

- Kliknięcie na `Zapis` rozpoczyna rejestrację pomiarów, które są równocześnie prezentowane na ekranie i zapisywane w pamięci.
- Kliknięcie na `Podgląd` wykonuje te same czynności z wyjątkiem zapisu do pamięci – rozpoczęcie kolejnego pomiaru powoduje utratę poprzednich danych.
- Przycisk `Stop` służy do zatrzymania rejestracji pomiarów.

Po wykonaniu żądanych pomiarów mogą być one prezentowane w różny sposób. Gdy wynikiem pomiaru jest pojedyncza wartość lub ciąg wartości wolno się zmieniających, wówczas celowe jest pokazywanie wyników w postaci cyfrowej lub analogowej – zupełnie, jakbyśmy używali cyfrowego lub wskazówkowego miernika.

Gdy rezultatem pomiaru jest seria wartości zmieniających się w czasie, wtedy wygodniej jest przedstawić je w postaci tabeli lub wykresu. Okno tabeli lub wykresu można utworzyć na dwa sposoby:

- z okna ustawień (rys. 12.3) – chwytając myszką ikonę tabeli lub wykresu i przeciągając ją do wybranego gniazda,
- z menu głównego – wybierając `Wyświetl` i następnie z listy rozwijanej `Nowa tabela` lub `Nowy wykres`.



Rys. 12.4. Okno wykresu

Przykładowe okno wykresu pokazano na rys. 12.4. Główna część okna zawiera właściwy wykres i pole statystyki. Ponadto, znajdują się w nim przyciski sterujące zawartością:

- `Źródło danych` – pozwala określić albo zmienić kanał, z którego mają być pobierane dane, oraz rodzaj danych z wybranego kanału. Na przykład, do wyboru może być `Kanał cyfrowy 1` i `Kanał cyfrowy 2`, a po wybraniu kanału –

Położenie, Prędkość i Przyspieszenie. Można wybrać więcej niż jeden rodzaj danych; wówczas okno będzie zawierać więcej wykresów lub kolumn tabeli.

- Dane w pamięci – umożliwia pobranie danych uprzednio zmierzonych i zachowanych w pamięci.
- Import danych – dotyczy pobierania danych zapisanych w innym formacie (przez inny program).
- Statystyka – powoduje kolejno otwieranie i zamykanie pola statystyki w prawej części okna.
- Kursor – powoduje powstanie krzyża poruszającego się zgodnie z ruchem myszki i podawanie współrzędnych w miejscu kursora.
- Lupa – powiększa fragment wykresu.
- Autoskalowanie – dostosowuje zakres współrzędnych wykresu do zakresu zmierzonych wielkości.
- Wygląd – umożliwia ustawienie parametrów wykresu, takich jak np. siatka, łączenie punktów.
- Dodaj – pozwala umieścić następny wykres razem z aktualnym.

Zawartość pola statystyki określa się po kliknięciu przycisku Opcje statystyki. Na rysunku 12.4 są pokazane w tym polu: liczba pomiarów, wartości minimalne i maksymalne. Dalsze możliwe dane statystyczne to wartości średnie i odchylenia standardowe. Osobną grupę stanowią: dopasowanie funkcji, pochodna, całka i histogram.

Dopasowanie funkcji polega na znalezieniu parametrów funkcji $y(x)$ najlepiej dopasowanej do danych pomiarowych. Na przykład, dopasowanie do funkcji liniowej polega na znalezieniu parametrów a_1 i a_2 funkcji $y = a_1 + a_2 x$. Po wybraniu Dopasowanie krzywej i następnie f.liniowa w polu statystyki widać postać funkcji z poprzedniego zdania oraz wartości parametrów a_1 i a_2. Oznaczenia pozostają takie same, niezależnie od nazw zmiennych, które aktualnie są mierzone. Przykładowo, badając ruch jednostajnie przyspieszony, mamy funkcję $\upsilon = \upsilon_0 + at$. W tym przypadku wyniki statystyki mają następujące znaczenie: $x = t$, $y = \upsilon$, $a_1 = \upsilon_0$, $a_2 = a$.

Z danych w tabeli lub na wykresie możemy wybrać tylko pewien zakres i zawrzeć je wewnątrz prostokąta zakreślonego myszką, który pojawia się jako obszar przyciemniony. Wszystkie obliczenia w polu statystyki odnoszą się do zaznaczonego zakresu. Brak zaznaczenia jest równoważny zaznaczeniu wszystkich danych.

13. Wyznaczanie gęstości za pomocą piknometru

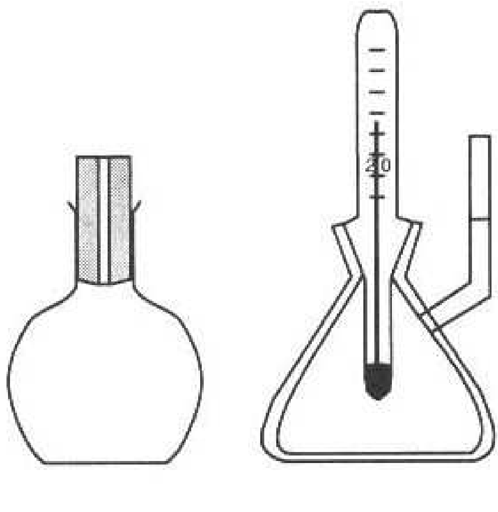
Wprowadzenie

Gęstość ciała określa się jako stosunek jego masy (m) do zajmowanej objętości (V):

$$d = \frac{m}{V}. \tag{13.1}$$

Masę ciała można łatwo zmierzyć przez ważenie, ale wyznaczenie objętości jest łatwe tylko w przypadku ciał o regularnych kształtach geometrycznych oraz cieczy w naczyniach o znanej objętości. W innych przypadkach trzeba się starać wyrazić objętość innymi wielkościami, dającymi się łatwo zmierzyć. W opisywanej metodzie objętość wyrazimy trzema masami, które wyznaczymy przez odpowiednie ważenie.

W niniejszym ćwiczeniu do wyznaczania gęstości używamy *piknometru*. Spośród kilku typów piknometrów najczęściej spotykaną formę stanowi naczynie szklane o pojemności około 50 cm^3 z doszlifowanym korkiem, przez którego środek przechodzi wąski kanalik (rys. 13.1). Dzięki takiej postaci piknometru ciała, które wypełniają go całkowicie (ciecz lub ciało stałe i ciecz), mają zawsze dokładnie tę samą objętość. Aby uzyskać dużą dokładność, należy zwracać uwagę, żeby poziom cieczy pokrywał się z górną krawędzią korka lub z zaznaczoną na niektórych piknometrach poziomą kreską.



Rys. 13.1. Piknometry – prosty (po lewej) i próżniowy

Wewnątrz napełnionego piknometru nie mogą się znajdować pęcherzyki powietrza – usuwamy je przez wstrząsanie. Aby wyeliminować mogące zachodzić w czasie pomiaru zmiany temperatury, w czasie wszelkich manipulacji nie należy ujmować piknometru gołą dłonią, lecz przez szmatkę lub za pomocą specjalnych szczypczyków.

Najdokładniejsze wyniki uzyskuje się z użyciem *piknometrów próżniowych* o podwójnych ściankach, w których wymiana ciepła z otoczeniem jest minimalna.

Wyznaczanie gęstości cieczy

Aby wyznaczyć gęstość cieczy, wykonujemy tylko jeden rodzaj pomiaru – ważenie za pomocą wagi analitycznej. Objętość piknometru otrzymamy z pomiaru masy wypełniającej go cieczy o znanej gęstości, najlepiej wody destylowanej. Stosując wzór (13.1) do wody w określonej temperaturze, otrzymamy

$$V = \frac{m_w}{d_{wt}}, \tag{13.2}$$

gdzie: m_w i d_{wt} oznaczają odpowiednio masę i gęstość wody.

Po wstawieniu powyższego związku do wzoru (13.1) gęstość badanej cieczy wyrazimy następująco:

$$d = \frac{m}{m_w} d_{wt}, \tag{13.3}$$

gdzie: d – gęstość badanej cieczy, m – masa badanej cieczy w objętości piknometru, m_w – masa wody w objętości piknometru oraz d_{wt} – gęstość wody w temperaturze, w której jest wykonywany pomiar.

Wartość d_{wt} znajdujemy w tablicach wielkości fizycznych, natomiast masy wody i badanej cieczy otrzymujemy w wyniku trzykrotnego ważenia.

- Ważymy pusty piknometr wraz z korkiem, zwracając uwagę, czy wnętrze jest czyste i suche (wnętrze piknometru najwygodniej można oczyścić przez wypłukanie w wodzie, a następnie w alkoholu i osuszenie strumieniem ciepłego powietrza). Oznaczamy masę pustego piknometru przez m_1.
- Ważymy piknometr wypełniony wodą destylowaną – tę masę oznaczamy przez m_2. Masa wody jest różnicą zmierzonych mas

$$m_w = m_2 - m_1 . \tag{13.4}$$

- Ważymy piknometr napełniony badaną cieczą – masa wynosi m_3, a masa cieczy

$$m = m_3 - m_1 . \tag{13.5}$$

Wykorzystując związki (13.4) i (13.5), możemy przedstawić równanie (13.3) za pomocą wielkości bezpośrednio mierzonych:

$$d = \frac{m_3 - m_1}{m_2 - m_1} d_{wt} . \tag{13.6}$$

Stosując powyższy wzór, obliczamy ostatecznie gęstość badanej cieczy.

Wyznaczanie gęstości ciał stałych

Gęstość ciała stałego można wyznaczyć za pomocą piknometru wtedy, gdy występuje ono w postaci umożliwiającej włożenie do piknometru, najwygodniej

w postaci proszku, śrutu lub małych kawałków. Czynności pomiarowe sprowadzają się znowu do wykonania trzykrotnego ważenia.

- Badane ciało sypkie w ilości od około 1/3 do 1/2 objętości piknometru ważymy, wyznaczając masę m_1. Pomiaru dokonujemy po umieszczeniu ciała (bez piknometru!) na zrobionej tacce papierowej.
- Piknometr napełniamy wodą destylowaną i znajdujemy masę całości – m_2.
- Umieszczamy badane ciało we wnętrzu piknometru z wodą, na skutek czego wylewa się z niego woda o objętości równej objętości ciała stałego. Po osuszeniu zewnętrznej powierzchni piknometru, usunięciu pęcherzyków powietrza oraz sprawdzeniu, czy poziom cieczy jest identyczny z poprzednim, ważymy układ, wyznaczając masę m_3. Masa m_3 jest mniejsza od sumy mas $m_1 + m_2$ o masę wody m_w, która wylała się w wyniku wyparcia jej przez ciało stałe:

$$(m_1 + m_2) - m_3 = m_w . \qquad (13.7)$$

Biorąc pod uwagę, że $m_w = d_{wt}V$, obliczamy objętość ciała stałego V:

$$V = \frac{m_1 + m_2 - m_3}{d_{wt}}, \qquad (13.8)$$

gdzie d_{wt} jest, jak w poprzedniej części, gęstością wody w temperaturze pokojowej.

Znając objętość i masę badanego ciała stałego, można wyrazić jego gęstość wielkościami mierzonymi w tej części doświadczenia:

$$d = \frac{m_1}{m_1 + m_2 - m_3} d_{wt} . \qquad (13.9)$$

Przebieg ćwiczenia

1. Wykonać ważenie według opisu powyżej.
2. Oszacować błędy ważenia.
3. Obliczyć szukaną gęstość ciała stałego lub cieczy za pomocą wzorów (13.9) lub (13.6).
4. Obliczyć błąd gęstości metodą różniczki zupełnej.
5. Zaokrąglić i zestawić wyniki i ich błędy.

Zestaw ćwiczeniowy

Waga analityczna, piknometr, badane ciała stałe i ciecze, woda destylowana

Pojęcia kluczowe

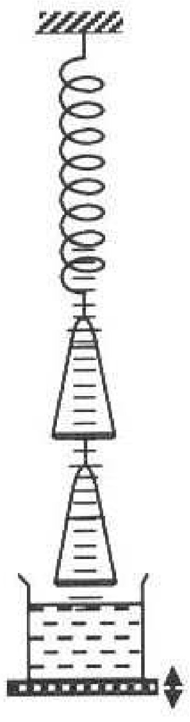
- Gęstość – definicja, wymiar, zależność od temperatury, anomalna zależność temperaturowa wody

- Waga analityczna (rozdz. 6) – budowa, warunek równowagi, czułość, dokładność, ważenie
- Obliczenie masy wody wypartej przez ciało stałe w piknometrze, obliczenie objętości ciała na podstawie ważenia.

14. Wyznaczanie gęstości za pomocą wagi Jolly'ego

Zasada pomiaru

Pomiar gęstości ciał z użyciem wagi Jolly'ego polega na wykorzystaniu praw Hooke'a i Archimedesa do opisu zjawisk zachodzących w układzie przedstawionym na rys. 14.1. Górny koniec sprężyny jest umocowany na ramieniu statywu, natomiast do jej dolnego końca są przymocowane dwie szalki, jedna pod drugą, oraz wskaźnik położenia. Podczas wykonywania pomiarów dolna szalka zawsze jest zanurzona w wodzie do określonego poziomu – takiego, żeby każde ciało badane było zanurzone całkowicie. Odpowiednią głębokość zanurzenia umożliwia przesuwalny stolik z umieszczoną na nim zlewką napełnioną wodą.



Rys. 14.1. Waga Jolly'ego

Gdy na szalce znajdzie się jakieś ciało, długość sprężyny zwiększa się o wartość Δl, przy czym wydłużenie to, zgodnie z *prawem Hooke'a*, jest proporcjonalne do zawieszonego ciężaru (P):

$$\Delta l = k\,P\,. \tag{14.1}$$

Współczynnik proporcjonalności k nazywamy czułością wagi sprężynowej, ponieważ określa on stosunek wydłużenia do zawieszonego ciężaru.

Wydłużenie sprężyny obserwujemy na tle skali milimetrowej ze zwierciadłem, które eliminuje tzw. *błąd paralaksy*. Na skalę należy patrzeć z takiego punktu, aby wskaźnik pokrywał się ze swoim obrazem w zwierciadle. Ta zasada odczytu jest stosowana w wielu przyrządach wskazówkowych i ma na celu ustalenie kąta obserwacji skali – linia widzenia prowadząca od oka przez wskaźnik do skali tworzy z powierzchnią skali zawsze kąt prosty. Błąd paralaksy powstaje wówczas, gdy wspomniany kąt obserwacji różni się od 90°.

Wykonując pomiar za pomocą wagi Jolly'ego, opieramy się na definicji gęstości bezwzględnej ciała:

$$d = \frac{m}{V}, \tag{14.2}$$

gdzie: m – masa ciała, V – jego objętość.

Obie występujące we wzorze (14.2) wielkości wyrazimy przez wydłużenie sprężyny.

Po umieszczeniu na górnej szalce ciała o masie m wskaźnik położenia sprężyny przesunie się z położeniem a do położenia b. Na podstawie wzoru (14.1) możemy napisać:

$$mg = \frac{1}{k}(b - a). \tag{14.3}$$

Gdy ciało będzie w wodzie (na szalce dolnej), wskaźnik zajmie położenie c, ponieważ obecnie oprócz siły ciężkości działa na nie, zgodnie z *prawem Archimedesa*, siła wyporu ku górze, równa ciężarowi wody o objętości ciała. Siła wyporu wynosi więc $m_w g$ (m_w jest masą wypartej wody), a zatem wypadkową siłę działającą na ciało w wodzie wyraża wzór:

$$mg - m_w g = \frac{1}{k}(c - a). \tag{14.4}$$

Po odjęciu stronami równań (14.3) i (14.4) obliczamy masę m_w, a następnie jej objętość, która jest również objętością ciała. W wyniku uzyskujemy wyrażenie:

$$V = \frac{1}{gkd_w}(b - c), \tag{14.5}$$

gdzie d_w jest gęstością wody w temperaturze pokojowej.

Po wstawieniu masy m obliczonej z równania (14.3) oraz objętości w postaci (14.5) do równania definiującego gęstość otrzymamy gęstość wyrażoną tylko przez położenia wskaźnika wagi Jolly'ego:

$$d = \frac{b - a}{b - c} d_w. \tag{14.6}$$

W celu wyznaczenia gęstości cieczy wykonamy jeszcze jedno ważenie, mianowicie tego samego ciała zanurzonego w badanej cieczy. Wówczas we wzorze (14.6) gęstość wody zastępujemy gęstością cieczy d_c, a położenie c – położeniem e (różnica wynika z innej siły wyporu):

$$d = \frac{b - a}{b - e} d_c. \tag{14.7}$$

Dwa ostatnie równania wyrażają gęstość tego samego ciała, możemy zatem porównać ich prawe strony, co pozwala następnie obliczyć gęstość badanej cieczy:

$$d_c = \frac{b-d}{b-e} d_w. \tag{14.8}$$

Przebieg ćwiczenia

Pomiar gęstości ciała stałego

1. Nalać wody do naczynia. Zanurzyć w niej dolną szalkę na głębokość określoną pewnym znakiem charakterystycznym na dolnej szalce, np. poprzecznym drucikiem, i odczytać położenie wskaźnika a.
2. Odczytać położenie wskaźnika b, gdy na górnej szalce znajduje się badane ciało.
3. Umieścić badane ciało na szalce dolnej i zachowując ten sam co poprzednio warunek zanurzenia dolnej szalki, odczytać położenie wskaźnika c.
4. Oszacować błąd odczytu położenia wskaźnika.
5. Obliczyć gęstość, korzystając z równania (14.6).
6. Obliczyć błąd gęstości metodą różniczki zupełnej.
7. Wykonać zaokrąglenia błędów i wyników.
8. Zestawić wyniki końcowe.

Pomiar gęstości cieczy

1. Wykonać pomiary 2–3, jak powyżej.
2. Zanurzyć ciało w badanej cieczy i odczytać położenie e.
3. Oszacować błąd odczytu położenia wskaźnika.
4. Obliczyć gęstość cieczy, wykorzystując równanie (14.8).
5. Obliczyć błąd gęstości metodą różniczki zupełnej.
6. Zaokrąglić błędy i wyniki.
7. Zestawić wyniki w postaci końcowej.

Zestaw ćwiczeniowy

Waga Jolly'ego, naczynie z cieczą, badane ciała stałe i ciecze

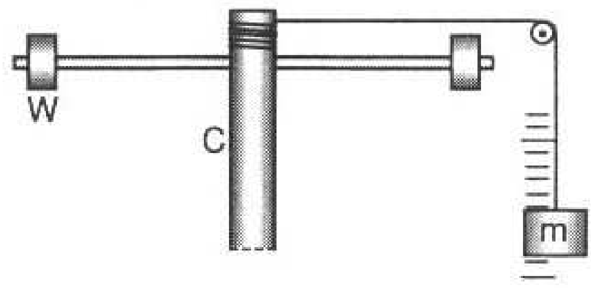
Pojęcia kluczowe

- Gęstość – definicja, wymiar
- Prawo Hooke'a – postać ogólna, postać dla obciążenia w powietrzu i w wodzie
- Waga sprężynowa, czułość wagi
- Prawo Archimedesa – postać ogólna, wyrażenie siły wyporu przez gęstość i objętość
- Obliczenie objętości ciała stałego, obliczenie gęstości ciała stałego i cieczy

15. Wyznaczanie parametrów ruchu obrotowego bryły sztywnej

Wprowadzenie

Do badania ruchu obrotowego stosujemy w ćwiczeniu odmianę wahadła Oberbecka, przedstawioną na rys. 15.1. Do pionowego walca C są przymocowane poziome pręty. Na tych prętach są osadzone walce W, których odległość od osi obrotu może być regulowana. Całe urządzenie może wykonywać ruch obrotowy wokół osi pionowej pokrywającej się z osią walca C. Na górnej części tego walca jest nawinięta jednowarstwowo nić, która następnie przechodzi przez krążek, a na jej końcu jest zawieszony ciężarek o masie m. Siła ciężkości powoduje jego spadanie z pewnym przyspieszeniem a i jednocześnie obrót całego wahadła.



Rys. 15.1. Urządzenie do badania ruchu obrotowego

Na wahadło, które będziemy traktować jak bryłę, działa moment siły ciężkości odważnika:

$$M = r_c m(g - a), \tag{15.1}$$

gdzie r_c jest promieniem walca C w miejscu nawinięcia nici. W ogólności, w powyższym równaniu występuje iloczyn wektorowy, ale w sytuacji, gdy nić jest nawinięta prostopadle do osi obrotu, można stosować zapis skalarny.

Pod działaniem momentu siły bryła wykonuje ruch obrotowy jednostajnie przyspieszony. Zgodnie z II zasadą dynamiki dla ruchu obrotowego opisuje go równanie:

$$M = I\alpha, \tag{15.2}$$

gdzie I – całkowity moment bezwładności bryły, α – przyspieszenie kątowe. Łącząc oba powyższe równania, otrzymujemy

$$mr_c g = \left(I + mr_c^2\right)\alpha. \tag{15.3}$$

W powyższym równaniu wykorzystano także związek między przyspieszeniem liniowym a i przyspieszeniem kątowym α: $a = r\alpha$.

W dalszych rozważaniach przyjmujemy, że liczba prętów i walców W wynosi 4. Całkowity moment bezwładności jest sumą trzech składników pochodzących od: walca C – I_c, prętów – $4I_p$ i walców W – $4I'_w$. Moment I'_w jest liczony względem osi obrotu całej bryły; można go wyrazić na podstawie *twierdzenia Steinera* w następującej postaci:

$$I_w' = I_w + m_w d^2, \tag{15.4}$$

gdzie I_w jest momentem bezwładności walca W względem osi przechodzącej przez jego środek masy i równoległej do osi obrotu całej bryły, a d jest odległością między osiami.

Po zsumowaniu wszystkich momentów bezwładności otrzymujemy:

$$I = I_c + 4I_p + 4I_w + 4m_w d^2. \tag{15.5}$$

W powyższym wyrażeniu trzy pierwsze wyrazy po prawej stronie są niezależne od położenia walców W względem osi obrotu. Oznaczymy je wspólnym symbolem I_0, tzn.

$$I_0 = I_c + 4I_p + 4I_w. \tag{15.6}$$

Pozwala to na zwięzłe zapisanie równania (15.5), które przyjmuje postać:

$$I = I_0 + 4m_w d^2. \tag{15.7}$$

Przyspieszenie kątowe α wyznaczymy przez pomiar kąta i czasu obrotu. Ponieważ w niniejszym ćwiczeniu moment siły jest stały, więc ruch obrotowy bryły jest jednostajnie przyspieszony. W czasie t, licząc od rozpoczęcia ruchu, nastąpi obrót o kąt φ określony wzorem:

$$\varphi = \frac{1}{2}\alpha t^2. \tag{15.8}$$

Kąt φ możemy łatwo wyznaczyć przez policzenie obrotów od początku ruchu do wybranego położenia ciężarka. Ze względu na konstrukcję urządzenia należy tak wybrać położenie końcowe, aby liczba obrotów stanowiła całkowitą wielokrotność ułamka 1/4. Między liczbą obrotów N a kątem zachodzi związek:

$$\varphi = 2\pi N. \tag{15.9}$$

Po zastosowaniu go do równania (15.8) otrzymujemy użyteczne wyrażenie na przyspieszenie kątowe:

$$\alpha = \frac{4\pi N}{t^2}. \tag{15.10}$$

Zapiszmy teraz równanie wyjściowe (15.3) w rozwiniętej formie przez wstawienie do niego wyrażeń (15.7) i (15.10):

$$mr_c g = (I_0 + 4m_w d^2 + mr_c^2)\frac{4\pi N}{t^2}. \tag{15.11}$$

To równanie przekształcimy tak, aby otrzymać w wyraźnej postaci zależność czasu t od położenia walców określonego odległością d. Przekształcenie równania (15.11) prowadzi do postaci:

$$t^2 = \frac{4\pi N(I_0 + mr_c^2)}{mr_c g} + \frac{16\pi N m_w}{mr_c g} d^2. \tag{15.12}$$

Równanie to możemy najwygodniej przedstawić graficznie, jeśli podstawimy nowe zmienne: $y = t^2$, $x = d^2$ oraz stałe:

$$a_r = \frac{16\pi N m_w}{mr_c g}, \tag{15.13a}$$

$$b_r = \frac{4\pi N(I_0 + mr_c^2)}{mr_c g}. \tag{15.13b}$$

Przy takich podstawieniach równanie (15.12) przyjmuje postać

$$y = a_r x + b_r. \tag{15.14}$$

Jest to równanie liniowe, którego wykresem jest linia prosta o współczynniku nachylenia a_r, przecinająca oś y w punkcie b_r.

Pomiary i obliczenia

Celem ćwiczenia jest:

- sprawdzenie równania $M = Ia$,
- wyznaczenie momentu bezwładności I_0,
- wyznaczenie masy walca W.

Aby zrealizować pierwszy cel, wykonujemy pomiary czasu opadania ciężarka z określonej wysokości dla kilku położeń walców W, różniących się odległością od osi obrotu d. Najpierw ustawiamy wszystkie 4 walce w największych (ale równych) odległościach od osi obrotu, nawijamy nić do określonego położenia ciężarka, licząc obroty, a następnie zwalniamy blokadę, pozwalając na swobodny obrót bryły i opadanie ciężarka. Jednocześnie mierzymy czas opadania do określonego położenia końcowego. Z kolei przesuwamy walce ku osi obrotu (zwracając uwagę na to, aby ich rozmieszczenie było dokładnie symetryczne) i powtarzamy pomiary czasu opadania. Analogicznie postępujemy dla co najmniej pięciu położeń walców. Po wykonaniu pomiarów sporządzamy wykres zależności t^2 w funkcji d^2. Jeżeli punkty wykresu układają się wzdłuż linii prostej, to równanie (15.3) jest spełnione.

Stosując regresję liniową, obliczamy współczynnik nachylenia i punkt przecięcia z osią y, które to wielkości wykorzystujemy do wyznaczenia I_0 z równania

(15.13b) oraz m_w z równania (15.13a). Przed przystąpieniem do obliczeń musimy ponadto wykonać pomiary promienia walca r_c oraz masy ciężarka m.

Wynik pomiaru momentu bezwładności może być porównany z wartością obliczoną teoretycznie, którą możemy uzyskać, stosując odpowiednie wzory na moment bezwładności brył geometrycznych.

Tabela 15.1. Momenty bezwładności podstawowych brył symetrycznych

Rodzaj ciała	Oś obrotu	Moment bezwładności
Kula pełna, promień R	przez środek	$\frac{2}{5}MR^2$
Powłoka sferyczna, promień R	przez środek	$\frac{2}{3}MR^2$
Walec, promień R	przez środek symetrii	$\frac{1}{2}MR^2$
Walec, promień R, wysokość h	średnica przechodząca przez środek bryły	$M(\frac{1}{4}R^2+\frac{1}{12}h^2)$
Pręt, długość l	prostopadła do pręta, przechodząca przez jego koniec	$\frac{1}{12}Ml^2$
Pręt, długość l	prostopadła do pręta, przechodząca przez jego środek	$\frac{1}{3}Ml^2$
Obręcz, promień R	oś symetrii / średnica obręczy	MR^2

Przebieg ćwiczenia

1. Zmierzyć wymiary elementów tworzących badaną bryłę.
2. Ustalić położenia walców W na prętach w zakresie od połowy do końca.
3. Zmierzyć masę ciężarka.
4. Ustalić położenie początkowe i końcowe ciężarka oraz policzyć obroty N odpowiadające różnicy położeń.
5. Znaleźć czas opadania ciężarka.
6. Oszacować błędy wielkości mierzonych bezpośrednio.
7. Powtarzać punkty 3–5 dla zmienionych położeń walców.
8. Wykreślić zależność $t^2 = f(d^2)$.
9. Stosując regresję liniową, znaleźć współczynnik nachylenia prostej i punkt jej przecięcia z osią y, a także błędy tych wielkości.
10. Obliczyć moment bezwładności I_0 oraz masę walca m_w (dokładniejszy opis – powyżej, przed tabelą).

11. Obliczyć błąd ΔI_0. W tym celu użyć metody różniczki zupełnej do przekształconego równania (15.13b).
12. Obliczyć błąd Δm_w. W tym celu użyć metody różniczki logarytmicznej do przekształconego równania (15.13a) (równanie to ma postać iloczynową).
13. Zaokrąglić błędy i wyniki.
14. Wykonać zestawienie końcowe.

Zestaw ćwiczeniowy

Wahadło Oberbecka na ramie, sekundomierz, suwmiarka

Pojęcia kluczowe

- Moment siły, moment bezwładności
- Przyspieszenie liniowe i kątowe, II zasada dynamiki dla ruchu postępowego i obrotowego
- Twierdzenie Steinera, całkowity moment bezwładności wahadła
- Zależność kąta obrotu od czasu
- Czynności pomiarowe
- Regresja liniowa

16. Wyznaczanie przyspieszenia ziemskiego za pomocą wahadła rewersyjnego

Wprowadzenie

Wahadła fizyczne i matematyczne wykonują ruch drgający pod wpływem siły ciężkości. W zakresie niedużych amplitud ruch ten jest ruchem harmonicznym, jego okres zależy od właściwości danego wahadła i od przyspieszenia ziemskiego.

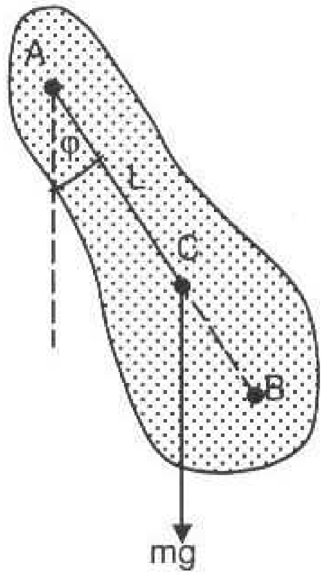
Wahadłem fizycznym jest każde ciało sztywne mogące się wahać wokół osi poziomej. Po wychyleniu z położenia równowagi na ciało działa moment ciężkości $mgL\sin\varphi$ (rys. 16.1). Po zastosowaniu do tej sytuacji II zasady dynamiki otrzymamy równanie:

$$-mgL\sin\varphi = I\frac{d^2\varphi}{dt^2}, \tag{16.1}$$

gdzie: I – moment bezwładności ciała względem punktu zawieszenia A, φ – kąt wychylenia od położenia równowagi, L – odległość od punktu zawieszenia A do

środka ciężkości C. Znak minus w równaniu (16.1) wskazuje, że skutkiem działania momentu siły zawsze jest zmniejszenie wychylenia ciała.

Podstawową właściwością *ruchu harmonicznego* jest proporcjonalność przyspieszenia do wychylenia (liniowego lub kątowego). Biorąc powyższe pod uwagę zauważamy, że ruch wahadła fizycznego w ogólnym przypadku nie jest ruchem harmonicznym – z równania (16.1) wynika bowiem, że przyspieszenie kątowe jest proporcjonalne do sinusa kąta wychylenia, a nie do samego kąta. Kryterium harmoniczności ruchu będzie spełnione tylko w zakresie małych wychyleń, dla których $\sin\varphi \approx \varphi$. Jeżeli ograniczymy się do małych wychyleń (kilka stopni), równanie (16.1) możemy zapisać w postaci:



Rys. 16.1. Wahadło fizyczne; A, B – punkty zawieszenia, C – środek masy

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{mgL}{I}\varphi. \qquad (16.2)$$

Ogólne równanie ruchu harmonicznego ma postać:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\omega^2\varphi. \qquad (16.3)$$

w którym ω oznacza prędkość kątową. W wyniku porównania dwóch ostatnich równań uzyskujemy wyrażenie określające okres wahadła fizycznego:

$$T_f = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}}, \qquad (16.4)$$

gdzie $D = mgL$ nazywa się momentem kierującym.

Wahadło matematyczne różni się zasadniczo od fizycznego rozkładem masy – stanowi je punkt materialny zawieszony na nieważkiej nici. Jeśli długość nici oznaczymy przez l, to okres drgań wahadła matematycznego wyrazi wzór:

$$T_m = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \qquad (16.5)$$

Wyobraźmy sobie, że mamy określone wahadło fizyczne, a także wahadło matematyczne o regulowanej długości. Jest oczywiste, że możemy tak dobrać długość tego ostatniego, aby okresy drgań obu wahadeł były równe. W ten sposób określiliśmy *długość zredukowaną* wahadła fizycznego. Jest ona równa długości mającego taki sam okres wahadła matematycznego.

Długość zredukowaną l_r obliczamy, porównując ze sobą równania (16.4) i (16.5).

$$l_r = \frac{I}{mL}. \tag{16.6}$$

Jeżeli znamy zredukowaną wahadła fizycznego, to jego okres drgań możemy znaleźć za pomocą równania dla wahadła matematycznego; nie jest do tego konieczna znajomość ani momentu bezwładności, ani momentu kierującego.

$$T_f = 2\pi\sqrt{\frac{l_r}{g}}. \tag{16.7}$$

Do wyznaczenia długości zredukowanej wykorzystujemy następującą właściwość wahadła fizycznego: wahadło zawieszone w punkcie A, a następnie w punkcie B (rys. 16.1) ma taki sam okres, jeżeli odległość między punktami zawieszenia jest długością zredukowaną.

Aby wykazać tę właściwość, założymy najpierw, że odległość między punktami zawieszenia ($AB = l$) jest dowolna, a następnie znajdziemy warunki, dla których jest możliwa równość okresów T_A oraz T_B.

$$T_A = 2\pi\sqrt{\frac{I_A}{mgL}}, \qquad T_B = 2\pi\sqrt{\frac{I_B}{mg(l-L)}}. \tag{16.8}$$

Momenty bezwładności względem osi przechodzących przez punkty A i B wyrazimy momentem I_c względem osi równoległej przechodzącej przez środek ciężkości. Na podstawie <u>*twierdzenia Steinera*</u> odpowiednie momenty są określone wyrażeniami:

$$I_A = I_c + mL^2, \tag{16.9}$$

$$I_B = I_c + m(l-L)^2.$$

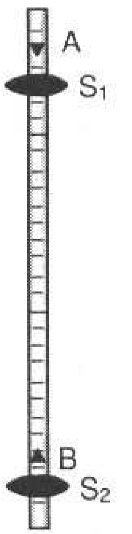
Po uwzględnieniu powyższych związków doprowadzamy warunek równości okresów $T_A = T_B$ do postaci:

$$\frac{I_c + mL^2}{L} = \frac{I_c + m(l-L)^2}{l-L}. \tag{16.10}$$

Jest to równanie kwadratowe ze względu na l. Rozwiązując je elementarnym sposobem, uzyska się dwa rozwiązania:

$$l_1 = 2L, \tag{16.11a}$$

$$l_2 = \frac{I_c + mL^2}{mL} = \frac{I_A}{mL}. \tag{16.11b}$$



Rys. 16.2. Wahadło rewersyjne; A, B – punkty zawieszenia, S_1, S_2 – ruchome soczewki

Wartość l_1 odpowiada przypadkowi, gdy oba punkty zawieszenia są symetryczne względem środka ciężkości, natomiast l_2 jest właśnie długością zredukowaną, co stwierdzamy natychmiast porównując ostatnie równanie z równaniem (16.6).

Powyższe rozumowanie dowodzi, że istotnie, okresy wahadła zawieszonego w różnych punktach są równe, jeżeli odległość między tymi punktami jest długością zredukowaną wahadła fizycznego.

Specjalną postacią wahadła fizycznego, ułatwiającą wyznaczenie długości zredukowanej, jest *wahadło rewersyjne* lub odwracalne, którego budowę przedstawiono na rys. 16.2. Punktem zawieszenia i jednocześnie osią wahań może być jedno z ostrzy – A lub B, a położenie środka masy i moment bezwładności zależą od położenia soczewek S_1 i S_2. W przypadku dowolnego położenia ostrzy i soczewek wahadło nie jest rewersyjne – okresy wahań dla obu zawieszeń są różne. Manipulując położeniem soczewki, możemy doprowadzić do równości obu okresów wahań i tylko wtedy odległość między ostrzami jest długością zredukowaną.

Przebieg ćwiczenia

1. Umocować ostrza A i B w pobliżu końców wahadła i zmierzyć ich odległość l_r. Soczewkę S_2 umocować na zewnątrz ostrzy, w pobliżu ostrza B.
2. Umocować soczewkę S_1 między ostrzami w pobliżu ostrza A.
3. Zmierzyć czas około 10 wahnięć wahadła zawieszonego na ostrzu A. Obliczyć okres T_A.
4. Zmieniając położenie soczewki S_1 co 5–10 cm w całym zakresie długości między ostrzami A i B, powtarzać pomiar okresów T_A.
5. Odwrócić wahadło, tzn. zawiesić je na ostrzu B.
6. Zmieniając położenie soczewki S_1 co 5–10 cm w całym zakresie położeń między ostrzami A i B, powtarzać pomiar okresów T_B.
7. Wykonać wykresy okresów T_A i T_B w funkcji położenia soczewki S_1. Punkt przecięcia się krzywych T_A i T_B wyznacza okres T jednakowy dla obu zawieszeń. Uwaga: Druga współrzędna punktu przecięcia nie jest długością zredukowaną.
8. Oszacować błąd odczytu punktu przecięcia na wykresie. To jest również błąd wyznaczenia okresu.
9. Obliczyć przyspieszenie ziemskie g, stosując przekształcony wzór (16.7).
10. Obliczyć błąd g – najłatwiej metodą różniczki logarytmicznej.
11. Zaokrąglić i zestawić wyniki i ich błędy.

Zestaw ćwiczeniowy

Wahadło rewersyjne, wahadło matematyczne, układ czasowo-zliczający

Pojęcia kluczowe

- Ruch harmoniczny prosty i tłumiony (także rozdz. 20): działające siły, równanie różniczkowe, zależność wychylenia od czasu
- II zasada dynamiki
- Wahadło fizyczne: środek ciężkości, moment siły, moment bezwładności, okres wahań, długość zredukowana
- Twierdzenie Steinera (także rozdz. 15 i 17)
- Wahadło rewersyjne; czynności pomiarowe

17. Wyznaczanie modułu sztywności metodą dynamiczną

Odkształcenie skręcające

Siły działające stycznie do powierzchni ciała stałego powodują przesunięcia kątowe poszczególnych elementów i prowadzą do odkształceń typu ścinanie lub skręcenie. W odkształconym ciele następuje zachwianie równowagi sił międzyatomowych, w wyniku czego pojawiają się siły oporu sprężystego.

Stosunek siły stycznej F_s do powierzchni S, na którą działa, nazywa się *naprężeniem stycznym* τ

$$\tau = \frac{F_s}{S}. \qquad (17.1)$$

Prawo Hooke'a, zgodnie z którym naprężenie jest proporcjonalne do odkształcenia, w przypadku działania naprężeń stycznych przyjmuje postać:

$$\tau = G\varphi, \qquad (17.2)$$

gdzie φ jest miarą deformacji kątowej, a G – *modułem sztywności* o wymiarze $N \cdot m^{-2} \cdot rad^{-1}$.

Jako przykład odkształcenia skręcającego rozpatrzymy cylinder cienkościenny poddany działaniu sił stycznych przyłożonych do górnej podstawy w sposób pokazany na rys. 17.1. Dolna podstawa jest umocowana nieruchomo. Kąt skręcenia φ możemy wyrazić przez obrót podstawy α:

$$\varphi = \frac{s}{l} = \frac{r}{l}\alpha, \tag{17.3}$$

a naprężenie styczne, zgodnie z określeniem (17.1), w postaci

$$\tau = \frac{dF_s}{2\pi r dr}. \tag{17.4}$$

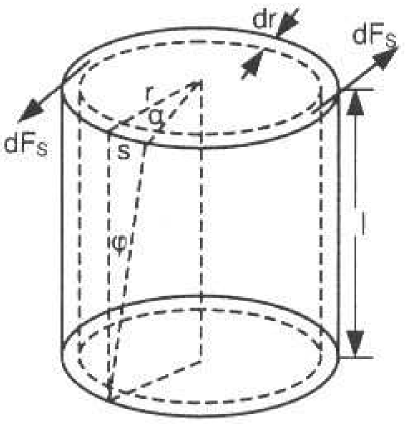
Po uwzględnieniu wyrażeń (17.3) i (17.4) w równaniu (17.2) znajdujemy siłę styczną dF_s:

$$dF_s = \frac{2\pi G\alpha r^2}{l}dr, \tag{17.5}$$

a po obustronnym pomnożeniu powyższego równania przez r otrzymamy *moment siły dM*:

$$dM = \frac{2\pi G\alpha r^3}{l}dr. \tag{17.6}$$

W warunkach równowagi statycznej równanie (17.6) można odczytać na dwa sposoby – przyjmując moment siły za przyczynę, a odkształcenie za skutek lub odwrotnie. W pierwszym przypadku skręcenie o kąt α jest wynikiem działania siły zewnętrznej o momencie dM, natomiast w drugim – moment siły sprężystości jest skutkiem istniejącego odkształcenia.



Rys. 17.1. Skręcenie cylindra cienkościennego

Przedstawiony na rys. 17.1 cylinder możemy traktować jako element pełnego walca. Moment siły skręcający podstawę walca o kąt α otrzymamy, całkując przyczynki pochodzące od pierścieni o promieniach zawartych od $r = 0$ do $r = R$

$$M = \frac{2\pi G\alpha}{l}\int_0^R r^3 dr. \tag{17.7}$$

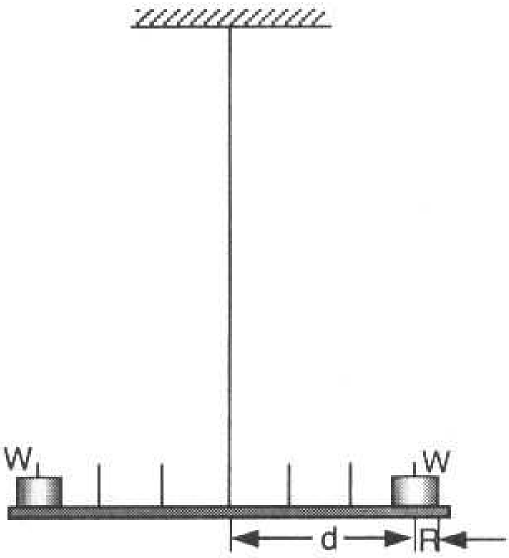
Po wykonaniu całkowania otrzymamy wyrażenie na moment siły

$$M = \frac{\pi G r^4}{2l}\alpha, \tag{17.8}$$

w którym, poza modułem sztywności G, występują wielkości łatwo dostępne do pomiaru, a więc równanie (17.8) może służyć do wyznaczenia modułu sztywności.

Metoda dynamiczna

Do wyznaczania modułu sztywności stosuje się metodę statyczną (dla prętów grubych) i dynamiczną (dla cienkich prętów i drutów). W metodzie dynamicznej badany drut jest przymocowany górnym końcem do nieruchomego uchwytu, na dolnym końcu jest zawieszony wibrator (rys. 17.2). *Wibrator* składa się z prętów zaopatrzonych w kołki umożliwiające nakładanie dodatkowych obciążeń.



Rys. 17.2. Urządzenie do wyznaczania modułu sztywności metodą dynamiczną

Gdy wibrator zostanie skręcony o pewien kąt, w drucie wystąpi moment sił sprężystości starający się przywrócić stan równowagi. Zwolniony wibrator będzie wykonywał ruch drgający. Siły oraz momenty sił występujące w skręconym pręcie lub drucie zostały rozpatrzone szczegółowo w poprzedniej części.

Z równania (17.8) wynika, że moment siły jest proporcjonalny do kąta wychylenia, co jest podstawową właściwością ruchu harmonicznego. Zatem, ruch wibratora jest ruchem harmonicznym, a okres tego ruchu

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}}\,, \tag{17.9}$$

gdzie: I – moment bezwładności, D – moment kierujący (por. rozdz. 16).

Moment kierujący obliczamy z równania (17.8), uwzględniając, że $D = M/\alpha$

$$D = \frac{\pi G r^4}{2l}\,. \tag{17.10}$$

Moment bezwładności wibratora nieobciążonego jest na ogół trudny do bezpośredniego obliczenia i dlatego zastosujemy metodę eliminującą tę wielkość. Po umieszczeniu na ramionach wibratora dodatkowych walców moment bezwładności zwiększy się o I_1, a okres drgań

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{I + I_1}{D}}\,. \tag{17.11}$$

Równania (17.9) i (17.11) pozwalają na wyeliminowanie I przez podniesienie obu równań do kwadratu, a następnie odjęcie ich stronami. Po tych operacjach pozostaje tylko przekształcenie prowadzące do wyrażenia momentu kierującego w postaci:

$$D = \frac{4\pi^2 I_1}{T_1^2 - T^2}. \tag{17.12}$$

Porównując ze sobą równania (17.10) i (17.12), możemy znaleźć moduł skręcenia G:

$$G = \frac{8\pi l I_1}{r^4 (T_1^2 - T^2)}, \tag{17.13}$$

gdzie: l – długość drutu, r – promień drutu, T – okres drgań wibratora nieobciążonego lub obciążonego wstępnie, T_1 – okres drgań wibratora obciążonego znanymi masami.

Ostatnie równanie jest podstawą metody wyznaczania modułu sztywności i wskazuje wielkości, które musimy zmierzyć, aby ten moduł obliczyć.

Dodatkowy moment bezwładności I_1 uzyskujemy, nakładając walce o znanej masie na odpowiednie kołki wibratora. Jeżeli odległość osi walców od wibratora wynosi d, liczba walców N, a masa każdego m, to zgodnie z *twierdzeniem Steinera* moment bezwładności tych walców wyrazi wzór:

$$I_1 = NI_0 + Nmd^2, \tag{17.14}$$

gdzie I_0 jest momentem bezwładności pojedynczego walca względem jego osi symetrii. Dla walca o promieniu R i masie m: $I_0 = (1/2)mR^2$.

Przebieg ćwiczenia

1. Zmierzyć długość i średnicę badanego drutu oraz średnicę walców obciążających wibrator.
2. Wyznaczyć okres drgań T wibratora obciążonego wstępnie, mierząc czas t około 10 wahań.
3. Wyznaczyć masy ciężarków walcowych.
4. Zmierzyć odległości d_1, d_2, d_3 kołków wibratora od jego środka.
5. Wyznaczyć okres wahań wibratora obciążonego T_1 dla kilku rozkładów mas.
6. Obliczyć moment bezwładności oraz moduł sztywności dla każdego rozkładu obciążeń.
7. Obliczyć średnią arytmetyczną wyników i odchylenie standardowe.
8. Wykonać zaokrąglenia i przedstawić ostateczną postać wyniku z uwzględnieniem błędu.

Zestaw ćwiczeniowy

Drut umocowany w uchwycie, wibrator, obciążniki, suwmiarka, śruba mikrometryczna, waga, sekundomierz

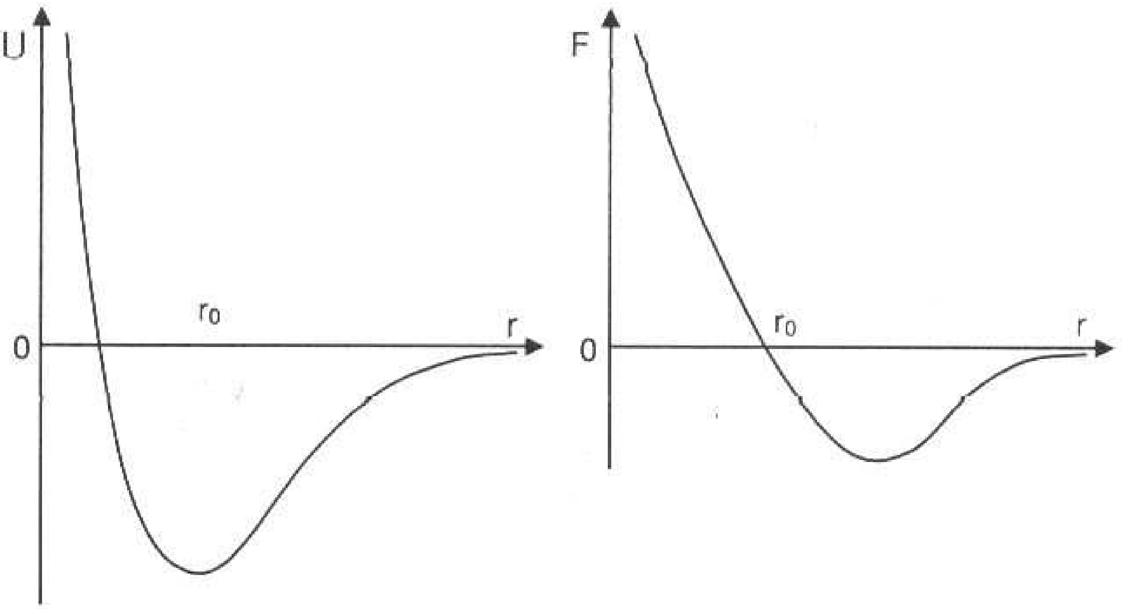
Pojęcia kluczowe

- Zależność odkształcenia od naprężenia (rozdz. 18), naprężenia normalne i styczne, odkształcenie w zależności od rodzaju naprężenia (rozdz. 18)
- Prawo Hooke'a (także rozdz. 18), moduł sztywności (skręcenia)
- Skręcenie cylindra i walca
- Ruch harmoniczny: moment siły a wychylenie, okres

18. Wyznaczanie modułu Younga metodą wydłużenia

Wprowadzenie

Atomy, z których składa się każde ciało stałe, oddziałują ze sobą siłami zależnymi od odległości między nimi. Zależność siły, a także energii potencjalnej od odległości w układzie dwóch atomów przedstawiono na rys. 18.1.



Rys. 18.1. Energia potencjalna dwóch atomów U oraz siła ich wzajemnego oddziaływania F

Przy pewnej odległości r_0 siła działająca między atomami jest równa zeru, a energia potencjalna osiąga wartość minimalną. Jest to odległość, przy której atomy są w równowadze. Gdy w ciele stałym wszystkie atomy znajdują się względem siebie w odległościach równowagowych, ciało to jest w równowadze – nie dąży samorzutnie do zmiany wymiarów. Jeżeli odległość między atomami ulegnie zmianie, np. wskutek działania siły zewnętrznej, pojawi się siła sprężystości, która

działa zawsze w takim kierunku, aby przywrócić stan równowagi. Z rysunku 18.1 wynika, że po zwiększeniu odległości powyżej r_0 siła ma wartość ujemną (atomy się przyciągają), natomiast gdy odległość jest mniejsza od r_0, znak siły jest dodatni, co oznacza, że atomy się odpychają.

Ze zmianą odległości atomów wiąże się makroskopowa deformacja ciała zwana *odkształceniem*. Gdy odkształcenie znika po odjęciu siły zewnętrznej, nazywamy je *sprężystym*, natomiast odkształcenie nieznikające całkowicie po odjęciu siły nazywamy *plastycznym*.

Siły odkształcające mogą działać prostopadle lub stycznie do powierzchni. Stosunek *siły normalnej* (prostopadłej) F_n do powierzchni S, na którą działa, nazywamy *naprężeniem normalnym*:

$$\sigma = \frac{F_n}{S}. \tag{18.1}$$

Pod wpływem naprężeń normalnych ciało ulega wydłużeniu lub skróceniu. Stosunek przyrostu długości Δl do długości początkowej l nazywamy *odkształceniem względnym*:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}. \tag{18.2}$$

Wydłużenie względne jest wprost proporcjonalne do naprężenia normalnego:

$$\sigma = E\varepsilon. \tag{18.3}$$

Powyższe stwierdzenie stanowi treść *prawa Hooke'a* i pozostaje słuszne zarówno do odkształcenia dodatniego (wydłużenia), jak i ujemnego (skrócenia).

Współczynnik proporcjonalności E nazywamy *modułem Younga*. Ma on wymiar ciśnienia (naprężenia) – N/m^2. Z równania (18.3) wynika sens fizyczny modułu Younga – jest to wartość naprężenia potrzebna do wydłużenia ciała o długość początkową. Określenia tego na ogół nie można wykorzystać do wyznaczenia modułu Younga, ponieważ dla większości ciał granica stosowania prawa Hooke'a leży znacznie poniżej wartości modułu Younga.

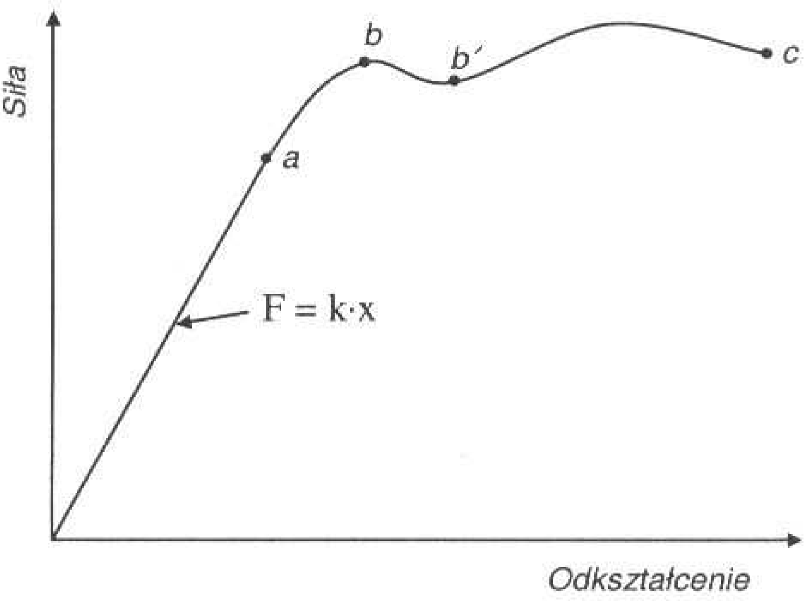
Aby wytyczyć sposób wyznaczania modułu Younga, napiszmy równanie (18.3) w postaci bardziej rozwiniętej:

$$\frac{F}{s} = E\frac{\Delta l}{l}. \tag{18.4}$$

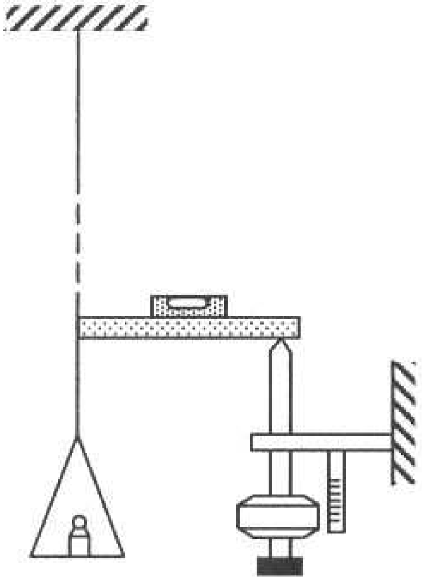
Jeżeli na osiach układu współrzędnych odłożymy stosunek siły do powierzchni przekroju oraz wydłużenie względne, to wykresem równania (18.4) będzie linia prosta, której współczynnik nachylenia jest modułem Younga.

Proporcjonalność odkształcenia do siły, a więc także stosowalność prawa Hooke'a, zachodzi tylko w pewnym zakresie odkształceń – mniejszych od granicy proporcjonalności. Dalszy wzrost wartości odkształcenia wymaga siły zmieniającej

się nieliniowo, w pewnym zakresie nawet malejącej. Wydłużane ciało przechodzi przez zakres sprężystości, plastyczności i w końcu następuje zerwanie. Na rys 18.2 prawo Hooke'a jest spełnione tylko poniżej punktu *a*.



Rys. 18.2. Wykres przyłożonej siły jako funkcji wydłużenia *a* – granica proporcjonalności, *b* – granica sprężystości, *b'* – granica plastyczności, *c* – granica wytrzymałości



Rys. 18.3. Pomiar wydłużenia drutu

Pomiary i obliczenia

W ćwiczeniu używamy długiego (1–3 m) drutu, którego górny koniec jest umocowany do sztywnej stalowej ramy tkwiącej w ścianie (rys. 18.3). Na dolnym końcu drutu jest zawieszona szalka, na którą kładziemy ciężarki. Na szalce umieszczamy na stałe ciężar około 5 N, którego zadaniem jest wyprostowanie drutu i usunięcie zgięć. Również do dolnego końca drutu jest przymocowana, za pomocą odpowiedniego połączenia osiowego, poziomica, której drugi koniec opiera się na nóżce śruby mikrometrycznej.

Ustawiwszy poziomicę w położeniu poziomym przed obciążeniem, a następnie po obciążeniu, znajdujemy z odczytów na śrubie przyrost długości drutu. Pomiary rozpoczynamy od ustawienia poziomicy w położeniu poziomym, gdy na szalce jest tylko obciążenie wstępne. Następnie rozciągamy drut, dodając stopniowo ciężarki, każdorazowo poziomujemy poziomicę i odczytujemy położenie na śrubie mikrometrycznej. Po osiągnięciu maksymalnego obciążenia powtarzamy pomiary w odwrotnej kolejności, tzn. od największych obciążeń do obciążenia prostującego. Jeżeli wartości wydłużeń przy jednakowych obciążeniach, wzrastających i malejących, są zgodne, to jest to dowód, że drut był dostatecznie wyprostowany, a zakres obciążeń nie przekroczył granicy sprężystości.

Powierzchnię przekroju drutu obliczamy z pomiarów średnicy za pomocą mikromierza.

W celu obliczenia modułu Younga przekształcimy najpierw równanie (18.4). Podstawimy $F = mg$ oraz $S = \pi d^2/4$ i po odpowiednim uporządkowaniu otrzymamy:

$$\Delta l = \frac{4gl}{\pi E d^2}. \tag{18.5}$$

Widać, że zależność wydłużenia od masy jest funkcją liniową. Na wykresie $\Delta l = f(m)$ będzie to linia prosta, której współczynnik nachylenia a można znaleźć metodą regresji liniowej. Wiadomo także, że współczynnik nachylenia jest równy wyrażeniu stojącemu przed m w równaniu (18.5). Po połączeniu obu wartości współczynnika otrzymamy:

$$a = \frac{4gl}{\pi E d^2},$$

a stąd obliczamy ostatecznie moduł Younga

$$E = \frac{4gl}{\pi a d^2}. \tag{18.6}$$

Przebieg ćwiczenia

1. Zmierzyć długość i średnicę drutu; liczbę pomiarów zaplanować na podstawie serii próbnej.
2. Obciążyć wstępnie drut i doprowadzić do równowagi poziomicę. Odczytać położenie śruby mikrometrycznej Z_0.
3. Kolejno obciążać szalkę ciężarkami o znanej masie i odczytywać odpowiednie wskazania mikromierza Z_n ($n = 1, 2, 3...$).
4. Powtórzyć pomiary wydłużeń dla obciążeń malejących.
5. Sporządzić wykres zależności wydłużenia od masy obciążającej.
6. Stosując regresję liniową, znaleźć współczynnik nachylenia i jego błąd.
7. Obliczyć wartość modułu Younga, stosując wzór (18.6).
8. Obliczyć błąd, stosując metodę różniczki logarytmicznej.
9. Zaokrąglić wyniki i błędy i zapisać wynik w postaci końcowej.

Zestaw ćwiczeniowy

Rama przymocowana do ściany, badane druty, poziomica, 2 śruby mikrometryczne, miara metrowa

Pojęcia kluczowe

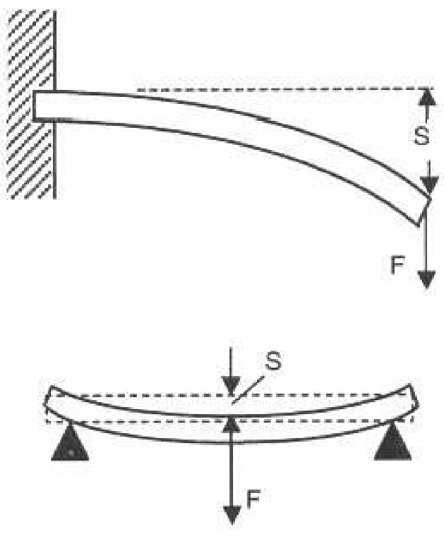
- Oddziaływanie międzyatomowe: zależność energii potencjalnej i siły od odległości
- Odkształcenie sprężyste i plastyczne, odkształcenie względne, naprężenia normalne i styczne
- Prawo Hooke'a, moduł Younga
- Regresja liniowa, obliczanie modułu Younga na podstawie wykonanych pomiarów

19. Wyznaczanie modułu Younga metodą ugięcia

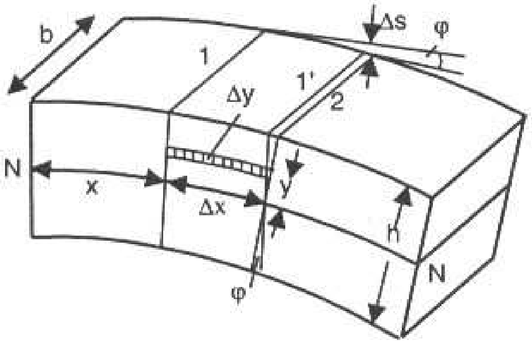
Wprowadzenie

Gdy na podłużny pręt działa siła prostopadle do jego długości, ulega on ugięciu, a wartość tzw. *strzałki ugięcia S* (rys. 19.1) jest proporcjonalna do siły F, a także zależy od wymiarów geometrycznych, sposobu mocowania pręta i rodzaju materiału, z którego jest on wykonany. To stwierdzenie jest *prawem Hooke'a* w odniesieniu do ugięcia.

Rozpatrzmy bardziej szczegółowo ugięcie pręta (belki), którego jeden koniec jest zamocowany poziomo, a do drugiego jest przyłożona pionowa siła F (rys. 19.1). Pod działaniem siły górne warstwy pręta są rozciągane, dolne zaś – ściskane. W środku wysokości istnieje warstwa, której długość nie ulega zmianie. Przekroje



Rys. 19.1. Ugięcie prętów



Rys. 19.2. Element pręta zginanego

prostopadłe pręta, gdy nie ma obciążenia, są równoległe, tworzą natomiast pewien kąt φ po przyłożeniu siły. Na rysunku 19.2 zaznaczono rozpatrywane przekroje

przez 1 i 2 oraz kąt φ między 1 i 2 (1′ jest równoległym przesunięciem przekroju 1 do linii przecięcia warstwy neutralnej N z przekrojem 2).

Weźmy pod uwagę element pręta o długości Δx, grubości Δy i szerokości b znajdujący się w odległości x od krawędzi zamocowanej i na wysokości y powyżej warstwy środkowej. Na skutek ugięcia belki warstwa badana ulega wydłużeniu o $y\varphi$, tak jakby była rozciągana przez siłę przyłożoną do przekroju o powierzchni Δyb. Zgodnie z *prawem Hooke'a* wydłużenie jest proporcjonalne do siły i długości początkowej oraz odwrotnie proporcjonalne do powierzchni przekroju:

$$y\varphi = \frac{F_n \Delta x}{Eb\Delta y}, \tag{19.1}$$

gdzie: E – moduł Younga, F_n – siła rozciągająca rozpatrywaną warstwę elementarną.

Taka sama siła, lecz przeciwnie skierowana, działa na warstwę elementarną położoną symetrycznie poniżej warstwy neutralnej N.

Moment siły F_n względem warstwy N

$$\Delta M = yF_n = E\frac{\varphi}{\Delta x} y^2 b\Delta y. \tag{19.2}$$

Całkowity moment M sił działających na wszystkie warstwy zawarte między przekrojami 1 i 2 obliczymy, całkując równanie (19.2) względem y po całej grubości:

$$M = E\frac{\varphi}{\Delta x}\int_{-h/2}^{+h/2} y^2 b dy. \tag{19.3}$$

Po oznaczeniu

$$\int_{-h/2}^{+h/2} y^2 b \cdot dy = H \tag{19.4}$$

możemy zapisać równanie (19.3) w postaci:

$$M = E\frac{\varphi}{\Delta x} H. \tag{19.5}$$

Powyższe wyrażenie otrzymaliśmy, rozpatrując odkształcenie pręta. Bezpośrednią przyczyną tego ugięcia jest siła F przyłożona do końca pręta. Moment tej siły względem przekroju 2 wynosi $F(l-(x+\Delta x))$ lub po zaniedbaniu wartości Δx jako małej w porównaniu z x

$$M = (l - x)F. \tag{19.6}$$

Kąt φ jest również zawarty między stycznymi do pręta w punktach, w których przekroje 1 i 2 przecinają górną powierzchnię. Na podstawie rysunku możemy napisać:

$$\varphi = \frac{\Delta S}{l - x}. \tag{19.7}$$

Po uwzględnieniu ostatniego związku w równaniu (19.5) oraz porównaniu równań (19.5) i (19.6) otrzymamy *elementarną strzałkę ugięcia*:

$$\Delta S = \frac{F}{EH}(l - x)^2 \Delta x. \tag{19.8}$$

Całkowitą strzałkę ugięcia otrzymamy, sumując analogiczne wyrażenie dla wszystkich odcinków Δx. Jeśli zastąpimy odcinki Δx nieskończenie małymi przyrostami dx, możemy równanie (19.8) scałkować:

$$S = \frac{F}{EH}\int_0^l (l - x)^2 dx. \tag{19.9}$$

Po wykonaniu całkowania wyrażenie na całkowitą strzałkę ugięcia przyjmuje postać:

$$S = \frac{F}{3EH} l^3. \tag{19.10}$$

Wartość współczynnika H zależy od kształtów i rozmiarów geometrycznych pręta. Gdy przekrój jest prostokątem o wysokości h i szerokości b, to całkowanie równania (19.4) prowadzi do wyniku:

$$H_{\text{pr}} = \frac{1}{12} bh^3. \tag{19.11a}$$

Całkowanie podobnego wyrażenia dla przekroju kołowego daje

$$H_k = \frac{\pi}{4} r^4. \tag{19.11b}$$

Podstawiając wartości współczynników H, otrzymujemy odpowiednio dla obu przekrojów strzałki ugięcia

$$S_{\text{pr}} = \frac{4l^3}{Ebh^3} F, \tag{19.12a}$$

$$S_k = \frac{4l^3}{3\pi E r^4} F . \qquad (19.12b)$$

Powyższe wzory wyrażają *prawo Hooke'a* w odniesieniu do ugięcia.

Otrzymane wzory odnoszą się do pręta jednostronnie obciążonego i jednym końcem umocowanego. Można je łatwo dostosować do sytuacji, gdy pręt jest swobodnie oparty dwoma końcami i obciążony w środku. Zachowuje się on wtedy tak, jak gdyby był zamocowany w środku, a na jego końce działały siły $F/2$ skierowane ku górze. Siła $F/2$ działa wtedy na pręt o długości $l/2$.

Po uwzględnieniu powyższych uwag we wzorach (19.12a) i (19.12b) uzyskamy wzory na strzałki ugięcia prętów dwustronnie podpartych.

$$S'_{pr} = \frac{l^3}{4Ebh^3} F , \qquad (19.13a)$$

$$S'_k = \frac{l^3}{12\pi E r^4} F . \qquad (19.13b)$$

Wzory (19.13) wykorzystuje się do wyznaczenia modułu Younga, gdyż wszystkie wielkości w nich występujące są łatwe do zmierzenia.

Pomiary i obliczenia

Strzałkę ugięcia mierzymy za pomocą katetometru – urządzenia do zdalnego pomiaru wysokości – nastawiając skrzyżowanie nici pajęczych lunetki najpierw na krawędź pręta nieobciążonego, w połowie jego długości, a następnie na tę samą krawędź przy zmienianym stopniowo obciążeniu pręta. Strzałka ugięcia jest równa różnicy położeń lunetki katetometru.

Długość l między krawędziami podpierającymi mierzymy miarą z podziałką milimetrową.

Szerokość i wysokość pręta, ewentualnie średnicę, mierzymy mikromierzem (jeśli wystąpi taka potrzeba, w wielu miejscach).

Obciążenie zmieniamy stopniowo, nakładając ciężarki o znanych masach.

Na podstawie równań (19.13) widzimy, że zależność strzałki ugięcia od przyłożonej siły jest funkcją liniową, a współczynnik nachylenia a linii jest równy wyrażeniu stojącemu przy F i wynosi odpowiednio:

$$a_{pr} = \frac{l^3}{4Ebh^3} \text{ (przekrój prostokątny)} , \qquad (19.14a)$$

$$a_k = \frac{l^3}{12\pi E r^4} \text{ (przekrój kołowy)}. \qquad (19.14b)$$

Współczynnik nachylenia można także obliczyć za pomocą regresji liniowej, gdy znany jest tylko szereg sił i odpowiadających im strzałek ugięcia. W ten sposób w ostatnich równaniach jedyną wielkością nieznaną pozostaje moduł Younga.

Przebieg ćwiczenia

1. Zmierzyć wymiary poprzeczne pręta.
2. Zmierzyć odległość między krawędziami podpierającymi i wyznaczyć środek pręta.
3. Wypoziomować katetometr i za jego pomocą wyznaczyć położenie górnej krawędzi pręta nieobciążonego h_0.
4. Obciążając kolejno środek pręta różnymi ciężarkami (o znanej masie), odczytywać położenia górnej krawędzi h_n pręta obciążonego.
5. Powtórzyć pomiary strzałki ugięcia podczas zmniejszenia obciążenia.
6. Sporządzić wykres zależności strzałki ugięcia od siły obciążającej.
7. Obliczyć metodą regresji liniowej współczynnik nachylenia i jego błąd.
8. Obliczyć moduł Younga, wykorzystując równania (19.14).
9. Obliczyć błąd modułu Younga (najłatwiej metodą różniczki logarytmicznej).
10. Podać ostateczną wartość wyniku i błędu (odpowiednio zaokrąglone).

Zestaw ćwiczeniowy

Dwie podpory zakończone pryzmatami, badane pręty, ciężarki z uchwytami, katetometr, mikromierz, miara długości

Pojęcia kluczowe

- Oddziaływanie międzyatomowe (rozdz. 18): zależność energii potencjalnej i siły od odległości
- Odkształcenie sprężyste i plastyczne, granica proporcjonalności, sprężystości, wytrzymałości
- Odkształcenie względne, naprężenia normalne i styczne
- Prawo Hooke'a (także rozdz. 18), moduł Younga
- Ugięcie: strzałka ugięcia, opis matematyczny
- Obliczanie modułu Younga na podstawie wykonanych pomiarów
- Regresja liniowa

20. Badanie rezonansu mechanicznego

Wprowadzenie

Rodzaj ruchu, jaki wykonuje ciało, zależy od właściwości siły na nie działającej. Ruch nazywamy *harmonicznym*, jeżeli siła działająca na ciało jest skierowana do jednego punktu, będącego położeniem równowagi, a jej wartość jest proporcjonalna do wychylenia ciała z położenia równowagi. Wyraża to równanie:

$$F = -k(x - x_0)\,, \tag{20.1}$$

gdzie: x – aktualne położenie, x_0 – położenie równowagi, k – stała sprężystości.

Układ fizyczny charakteryzujący się powyższymi właściwościami nazywamy *oscylatorem harmonicznym*.

Przykładami oscylatorów harmonicznych są:

- sprężyna z zamocowaną na końcu masą,
- wahadło matematyczne i fizyczne (w zakresie małych wychyleń),
- elektrony wykonujące ruch drgający w antenie, a także w obwodzie LC,
- atomy i jony drgające wokół położeń równowagi w węzłach sieci krystalicznej.

Jeżeli w równaniu (20.1) przyjmiemy $x_0 = 0$ oraz wyrazimy siłę przez masę i przyspieszenie, otrzymamy równanie:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx\,. \tag{20.2}$$

Po podzieleniu przez masę i wprowadzeniu oznaczenia $k/m = \omega_0^2$ otrzymujemy postać:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0\,, \tag{20.3}$$

która jest najczęściej spotykaną formą *równania różniczkowego ruchu harmonicznego*. Rozwiązaniem tego równania jest funkcja:

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)\,, \tag{20.4}$$

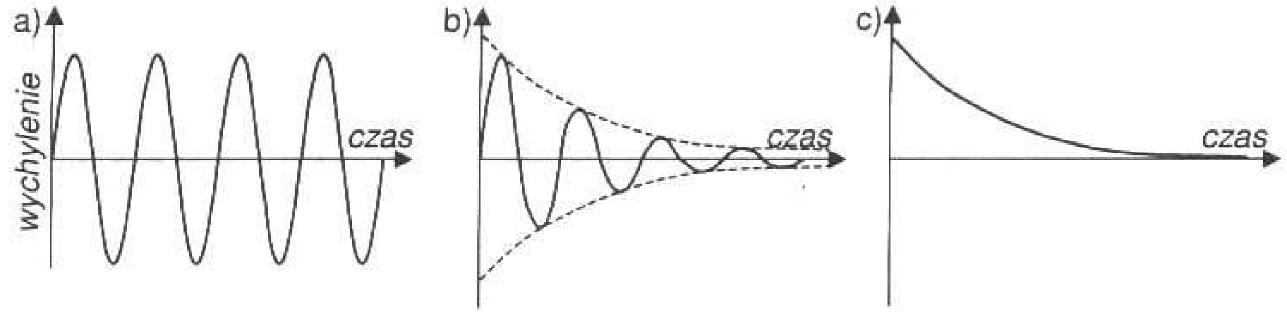
gdzie A jest amplitudą, a $\omega_0 = 2\pi/T$ – częstotliwością kołową.

Wyrażenie $(\omega_0 t + \varphi)$ jest fazą ruchu, a φ – fazą początkową zależną od stanu ruchu w chwili $t = 0$. Jeżeli w chwili początkowej ciało jest maksymalnie wychylone, to $\varphi = 0$; jeżeli $t = 0$ i $x = 0$, to $\varphi = \pi/2$; jeżeli $t = 0$ i $x = A/2$, to $\varphi = \pi/3$. Intuicyjnie, faza w dowolnym stanie ruchu jest kątem na wykresie „wzorcowej" (nieprzesuniętej) kosinusoidy, któremu odpowiada taki sam stan wychylenia.

Wielkość x występująca w równaniach (20.3) i (20.4) jest wychyleniem w znaczeniu ogólnym – może to być odległość liniowa od położenia równowagi, może to

być kąt wychylenia, a także może to być wielkość niemechaniczna, np. natężenie prądu lub ładunek elektryczny na okładce kondensatora w obwodzie LC.

Opisany wyżej ruch harmoniczny nosi nazwę ruchu *harmonicznego prostego* dla odróżnienia od innych przypadków, kiedy oprócz siły typu $-kx$ działają jeszcze inne siły.



Rys. 20.1. Wykres ruchu harmonicznego: a) prostego b), słabo tłumionego, c) silnie tłumionego

Równanie *ruchu harmonicznego tłumionego* ma postać:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b\frac{dx}{dt}. \tag{20.5}$$

Wyraz $-bdx/dt$ jest siłą tłumiącą, której wartość jest proporcjonalna do prędkości. Wykonując proste przeniesienia i dzielenia, doprowadzimy ostatnie równanie do postaci:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0, \tag{20.6}$$

gdzie podstawiono $2\beta = b/m$ oraz $\omega_0^2 = k/m$. Wielkość β nazywa się *współczynnikiem tłumienia*.

W celu znalezienia rozwiązania równania (20.6) wykonujemy podstawienie:

$$x = ze^{-\beta t}, \tag{20.7}$$

w wyniku czego równanie to przyjmie postać:

$$\frac{d^2z}{dt^2} + (\omega_0^2 - \beta^2)z = 0, \tag{20.8}$$

która jest całkowicie równoważna pod względem formalnym równaniu (20.3), jeśli $\omega_0^2 - \beta^2$ jest dodatnie. Rozwiązaniem równania różniczkowego (20.8) jest funkcja typu (20.4)

$$z = A\cos(\omega' t + \delta), \tag{20.9}$$

w której częstotliwość kołowa jest wyrażona wzorem:

$$\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}\,. \tag{20.10}$$

Wracamy ponownie do zmiennej x i otrzymujemy wyraźną postać zależności czasowej wychylenia w ruchu harmonicznym tłumionym:

$$x = Ae^{(-\beta t)}\cos(\omega t + \varphi)\,. \tag{20.11}$$

Jak widać z powyższego równania, amplituda w ruchu tłumionym wynosi $A\exp(-\beta t)$ i nie jest stała, lecz zmniejsza się wykładniczo z czasem, dążąc do zera. Ponadto częstość drgań ω' jest mniejsza niż w ruchu swobodnym. Współczynnik tłumienia określamy jako logarytm stosunku amplitud dwóch kolejnych drgań. Na podstawie równania (20.11) amplitudy drgań oznaczonych przykładowo indeksami n i n+1 wynoszą odpowiednio

$$A_n = Ae^{-\beta t} \text{ oraz } A_{n+1} = Ae^{-\beta(t+T)}\,.$$

Po wzięciu powyższego pod uwagę i dokonaniu elementarnych przekształceń otrzymujemy wyrażenie na współczynnik tłumienia:

$$\beta = \frac{1}{T}\ln\frac{A_n}{A_{n+1}}\,. \tag{20.12}$$

Wprowadzimy pojęcie *czasu relaksacji*

$$\tau = \frac{1}{2\beta}\,, \tag{20.13}$$

za pomocą którego możemy następująco wyrazić amplitudę:

$$Ae^{(-\beta \cdot t)} = Ae^{-\frac{t}{2\tau}}\,. \tag{20.14}$$

Widzimy, że w ciągu czasu $t = 2\tau$ amplituda zmniejsza się e-krotnie. Ponieważ energia ruchu drgającego jest proporcjonalna do kwadratu amplitudy, więc energia zmniejsza się e-krotnie w ciągu czasu $t = \tau$.

Ważnym parametrem charakteryzującym układ drgający jest *współczynnik dobroci* Q zdefiniowany poniżej.

$$Q = 2\pi\frac{\text{energia ruchu}}{\text{średnia energia tracona w jednym okresie}}\,. \tag{20.15}$$

Można wykazać[1], że współczynnik dobroci zależy od czasu relaksacji (lub współczynnika tłumienia) oraz od częstotliwości drgań swobodnych układu w następujący sposób:

[1] Patrz np.: Ch. Kittel i in., Mechanika, wyd 3, Warszawa, PWN 1975

$$Q = \omega_0 \tau = \frac{\omega_0}{2\beta}. \tag{20.16}$$

Należy pamiętać, że funkcja opisana równaniem (20.11) jest rozwiązaniem równania (20.8) tylko dla przypadku, gdy $\omega_0^2 - \beta^2 > 0$, któremu odpowiada słabe tłumienie. Gdy tłumienie jest silne, czyli dla $\omega_0^2 - \beta^2 < 0$, rozwiązaniem równania (20.8) jest funkcja nieokresowa, opisująca powolny nieoscylacyjny powrót do położenia równowagi. Zależność czasową wychylenia w ruchu nietłumionym oraz słabo i silnie tłumionym przedstawiono na rys. 20.1.

Drgania wymuszone

Oprócz omówionej siły tłumiącej na oscylator może działać okresowa siła zewnętrzna o dowolnej częstotliwości. Równanie ruchu ma wówczas postać:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = F_0 \sin\omega'' t, \tag{20.17}$$

a jego rozwiązaniem jest funkcja

$$x = A\sin(\omega'' t + \varphi). \tag{20.18}$$

Jak widać, w tej sytuacji oscylator wykonuje ruch harmoniczny z częstotliwością siły wymuszającej ω'', a nie z częstotliwością własną ω_0.

Amplituda ruchu wymuszonego jest proporcjonalna do amplitudy siły wymuszającej F_0, a także zależy bardzo mocno od różnicy między częstotliwością siły wymuszającej a częstotliwością własną oscylatora:

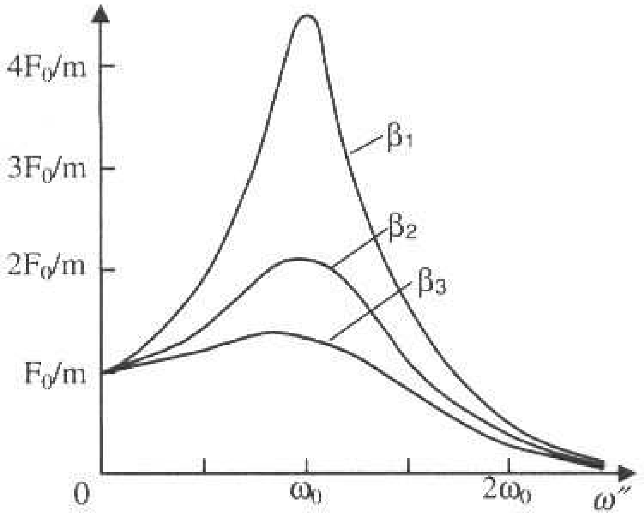
$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega''^2)^2 + (2\beta\omega'')^2}}. \tag{20.19}$$

Amplituda osiąga największą wartość, gdy częstotliwość siły wymuszającej

$$\omega'' = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \tag{20.20}$$

Ta częstotliwość nazywa się *częstotliwością rezonansową* ω_r, a zjawisko osiągania maksymalnej amplitudy drgań wymuszonych o takiej częstotliwości nazywa się *rezonansem*. Częstotliwość rezonansowa jest zawsze mniejsza od częstotliwości drgań swobodnych układu. Jedynie gdy współczynnik tłumienia jest mały, można przyjąć, że $\omega_r \approx \omega_0$.

Przykładowe wykresy amplitudy wymuszonego ruchu harmonicznego w funkcji częstotliwości siły wymuszającej dla różnych wartości współczynnika tłumienia przedstawiono na rys. 20.2. Krzywe widoczne na wykresie często są nazywane *krzywymi rezonansowymi*.



Rys. 20.2. Amplituda ruchu wymuszonego w funkcji częstotliwości siły wymuszającej dla różnych współczynników tłumienia: $\beta_1 = 0{,}1\,\omega_0$, $\beta_2 = 0{,}25\,\omega_0$, $\beta_3 = 0{,}5\,\omega_0$

Siła wymuszająca wykonuje pracę, której część jest przekazywana do oscylatora, co powoduje przyrost jego energii, a więc również amplitudy. Wartość amplitudy ustala się, gdy prędkość strat energii zrówna się z mocą przekazywaną do oscylatora przez siłę wymuszającą. Moc absorbowana jest oczywiście największa w rezonansie i zmniejsza się do połowy wartości maksymalnej, gdy częstotliwość zmniejsza się lub wzrasta względem częstotliwości rezonansowej o pewną wartość $\Delta\omega_{1/2}$, określoną następująco:

$$P(\omega_r \pm \Delta\omega_{1/2}) = 1/2P(\omega_r). \qquad (20.21)$$

Wielkość $\Delta\omega_{1/2}$ nazywa się *szerokością połówkową*. Można ją łatwo zmierzyć, odczytując na wykresie szerokość krzywej rezonansowej w połowie wysokości. Można wykazać[2], że *całkowita szerokość rezonansu* może być wyrażona przez współczynnik tłumienia lub czas relaksacji w następujący sposób:

$$2\Delta\omega_{1/2} = 2\beta = \frac{1}{\tau}. \qquad (20.22)$$

Posługując się powyższymi związkami oraz równaniem (20.16) dobroć oscylatora możemy wyrazić za pomocą szerokości rezonansu:

$$Q = \frac{\omega_0}{2(\Delta\omega_{1/2})}, \qquad (20.23)$$

a więc ostrość krzywej rezonansowej jest miarą dobroci oscylatora. Wąska krzywa rezonansowa oznacza dużą dobroć, a więc małe tłumienie i małe straty energii.

Pomiary i obliczenia

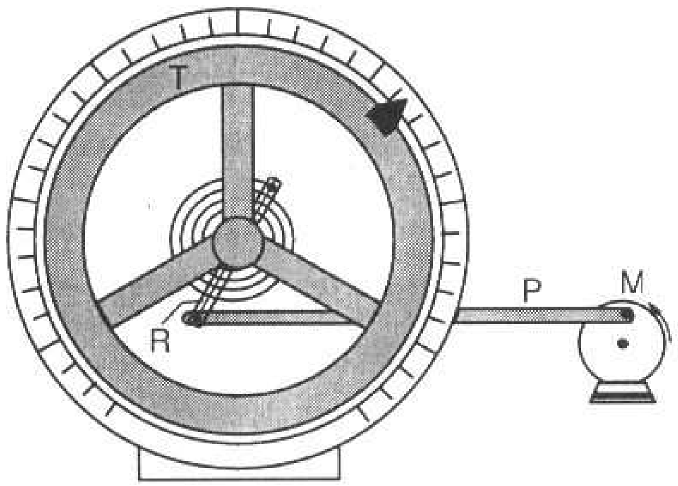
Oscyłatorem, którego właściwości chcemy określić, jest wahadło balansowe przedstawione na rys. 20.3. Składa się ono z tarczy balansowej *T* oraz spiralnej sprężyny, której jeden koniec łączy się z tarczą, a drugi z ramieniem *R*. Tarcza i ramię są umieszczone niezależnie na wspólnej osi obrotu, a koniec ramienia jest

---

[2] Por. przypis 1

połączony prętem P z ramieniem silnika M, którego obrót wytwarza sinusoidalnie zmieniający się moment siły działający na tarczę balansową.

Gdy ramię jest unieruchomione, wahadło może wykonywać ruch harmoniczny prawie swobodny – tłumiony tylko oporami urządzenia. Jeżeli do tarczy dołączymy elektromagnes, wystąpi dodatkowe tłumienie. W tym ostatnim przypadku hamowanie odbywa się w wyniku oddziaływania pola magnetycznego z prądami wirowymi wytworzonymi podczas ruchu wahadła. Siła tłumiąca ruch może być regulowana za pomocą natężenia prądu elektromagnesu.



Rys. 20.3. Urządzenie do badania drgań wymuszonych; M – silnik elektryczny, P – pręt łączący silnik z ramieniem R tarczy balansowej T

Gdy silnik się obraca, oscylator wykonuje ruch harmoniczny wymuszony. Częstotliwość obrotów silnika zmieniamy przez zmianę napięcia zasilania, a mierzymy przez pomiar sekundomierzem czasu kilku wahnięć. Zarówno tarcza, jak i ramię mają wskaźniki umożliwiające obserwację ich ruchu i pomiary amplitud.

Celem ćwiczenia jest znalezienie współczynnika dobroci oscylatora na podstawie dwóch niezależnych pomiarów.

- Dla ruchu tłumionego mierzymy najpierw okres i obliczamy częstotliwość ω'. Następnie mierzymy amplitudy kilku kolejnych wahnięć i na tej podstawie obliczamy współczynnik tłumienia i stałą relaksacji (wzory 20.12 i 20.13). Na podstawie tych wielkości obliczamy dobroć, stosując równanie (20.16). Uwaga: Jeżeli tłumienie nie jest zbyt silne, możemy przyjąć, że $\omega' = \omega_0$, w przeciwnym wypadku musimy usunąć elektromagnes tłumiący i znaleźć ω_0 dla oscylatora nietłumionego.
- Dla ruchu wymuszonego wykonujemy pomiary krzywej rezonansowej, z której znajdujemy szerokość połówkową i następnie obliczamy dobroć ze wzoru (20.23).
-

Przebieg ćwiczenia

1. Unieruchomić ramię R i ustawić skalę tak, aby wskaźnik tarczy wskazywał zerową wartość. Odłączyć elektromagnes hamujący.
2. Zmierzyć czas około 10 wahnięć i wyznaczyć okres i częstotliwość kołową ω'.
3. Zmierzyć amplitudy dla kilku następujących po sobie wahnięć.
4. Stosując wzór (20.12), wyznaczyć dla różnych par amplitud współczynnik β, a następnie jego wartość średnią.
5. Obliczyć czas relaksacji oraz częstotliwość drgań swobodnych.

6. Obliczyć dobroć oscylatora na podstawie wzoru (20.16).
7. Uruchomić drgania wymuszone. Ustalić szacunkowo zakres napięć zasilania silnika, w którym obserwuje się wyraźne zmiany amplitudy drgań. Rezonans powinien wystąpić mniej więcej w środku tego zakresu.
8. W wyznaczonym zakresie dokonać co najmniej 10 pomiarów okresu i amplitudy drgań.
9. Wykreślić krzywą rezonansową, tzn. zależność amplitudy od częstotliwości kołowej.
10. Z wykresu znaleźć częstotliwość rezonansową oraz całkowitą szerokość rezonansu $2(\Delta\omega_{1/2})$.
11. Obliczyć dobroć oscylatora na podstawie równania (20.23).
12. Powtórzyć punkty 2–11 dla różnych wartości prądu elektromagnesu.

Zestaw ćwiczeniowy

Wahadło balansowe, silnik, układ połączeń wahadła z silnikiem, zasilacze, sekundomierz

Pojęcia kluczowe

- Ruch harmoniczny prosty: działająca siła, równanie ruchu, zależność wychylenia od czasu, faza, faza początkowa, okres, częstotliwość kołowa
- Ruch harmoniczny tłumiony: działające siły, równanie ruchu, wykres ruchu dla różnych tłumień, współczynnik tłumienia, zależność wychylenia od czasu, częstotliwość kołowa, czas relaksacji, dobroć oscylatora
- Drgania wymuszone: równanie ruchu, amplituda w funkcji częstotliwości, rezonans, szerokość rezonansu, dobroć a szerokość rezonansu
- Wielkości mierzone, wielkości obliczane

21. Badanie ruchu jednostajnie przyspieszonego za pomocą komputerowego zestawu pomiarowego

Wprowadzenie

Rodzaj ruchu, jaki wykonuje ciało, zależy od właściwości siły, która go powoduje. Na przykład, siła centralna powoduje ruch po okręgu, siła proporcjonalna do wychylenia z położenia równowagi – ruch harmoniczny, siła zerowa – ruch jednostajny, siła stała – ruch jednostajnie zmienny.

Położenie punktu materialnego w przestrzeni jest opisane przez wektor wodzący, wyrażony przez trzy współrzędne

$$\vec{r} = \vec{r}(x, y, z) \tag{21.1}$$

Współrzędne punktu będącego w ruchu są zmienne w czasie, a koniec wektora wodzącego porusza się, kreśląc drogę, po której ruch się odbywa. W ogólnym przypadku droga może być linią krzywą, a jej przyrosty w kolejnych odcinkach czasu mogą być różne. Ruch charakteryzują trzy parametry: droga s, prędkość v i przyspieszenie a. W ogólnym przypadku wszystkie trzy wielkości są wektorami, ale dla celów niniejszego ćwiczenia będziemy rozważać tylko ruch po linii prostej i wielkości skalarne. Jeżeli za punkt wyjścia przyjmiemy drogę, to pozostałe wielkości definiuje się następująco:

$$v = \frac{ds}{dt}, \tag{21.2}$$

$$a = \frac{d^2 s}{dt^2} \quad \text{albo} \quad a = \frac{dv}{dt}. \tag{21.3}$$

Prędkość i przyspieszenie są na ogół wielkościami zmieniającymi się w czasie. Występujące w powyższych równaniach pochodne pozwalają na obliczenie *prędkości chwilowej* i *przyspieszenia chwilowego* w dowolnej chwili t, gdyż stosowane w obliczeniach przyrosty są bardzo małe.

W przypadku ruchu *jednostajnie zmiennego* przyspieszenie jest stałe i z równania (21.3) możemy wyznaczyć prędkość w dowolnej chwili. Załóżmy, że w chwili $t = 0$ prędkość wynosi v_0, a w dowolnej chwili t wynosi ona v. Po przekształceniu równania do postaci $dv = adt$ możemy obie strony scałkować w odpowiednich granicach:

$$\int_{v_0}^{v} dv = a\int_{0}^{t} dt. \tag{21.4}$$

Obliczenie całek prowadzi do zależności prędkości od czasu:

$$v = v_0 + at. \tag{21.5}$$

W podobny sposób możemy uzyskać całki zawierające drogę:

$$\int_{0}^{s} ds = \int_{0}^{t} (v_0 + at)dt \tag{21.6}$$

i ostatecznie zależność drogi od czasu

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2}. \qquad (21.7)$$

Przyspieszenie ziemskie

Na każde ciało znajdujące się w polu grawitacyjnym Ziemi działa siła w kierunku do środka Ziemi. Siła ta nazywa się siłą ciężkości, a jej wartość jest określona prawem powszechnej grawitacji:

$$F = G\frac{mM}{R^2}, \qquad (21.8)$$

gdzie G jest stałą grawitacyjną, m – masą ciała, M – masą Ziemi, R – odległością od środka Ziemi.

Ta sama siła może być wyrażona przez II zasadę dynamiki:

$$F = mg. \qquad (21.9)$$

Występująca w tym równaniu wielkość g jest przyspieszeniem ziemskim. Porównując dwa ostatnie wyrażenia widzimy, że przyspieszenie ziemskie da się wyrazić w postaci równania:

$$g = G\frac{M}{R^2}, \qquad (21.10)$$

z którego wynika, że nie jest ono stałe, lecz zmienia się wraz ze zmianą odległości od środka Ziemi. Jednak dla zjawisk zachodzących w zakresie niewielkich wysokości ΔR nad powierzchnią Ziemi można z dostateczną dokładnością przyjąć, że odległość od środka Ziemi jest stała, a więc przyspieszenie ziemskie jest w tym zakresie stałe.

PRZYKŁAD

Obliczyć zmianę przyspieszenia ziemskiego przy przejściu z powierzchni Ziemi na wysokość ΔR = 6,37 km. Promień Ziemi wynosi około 6370 km, więc $\Delta R/R$ = 0,001; do tak małej zmiany możemy zastosować metody teorii błędów. Stosując metodę różniczki logarytmicznej do równania (21.10), otrzymamy $\Delta g/g = 2\Delta R/R$. Wartość liczbowa $\Delta g/g$, czyli względna zmiana przyspieszenia, wynosi 0,2%.

Równia pochyła

Siła ciężkości mg ciała spoczywającego na równi pochyłej rozkłada się na dwie składowe: równoległą do równi składową F oraz prostopadłą do niej składową N. Skutkiem działania siły F jest ruch wzdłuż równi i dlatego nazywa się ona *siłą zsuwającą*. Składowa N nie prowadzi do ruchu, lecz powoduje nacisk ciała na podłoże, stąd jej nazwa *siła nacisku*.

Obie siły zależą od kąta nachylenia równi i wynoszą odpowiednio (patrz rys. 21.1):

$$F = mg \sin\alpha\,, \tag{21.11}$$

$$N = mg \cos\alpha \tag{21.12}$$

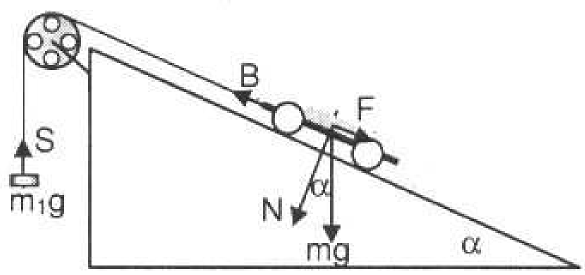
Nacisk na podłoże wiąże się z siłą tarcia, która utrudnia wprowadzenie ciała w ruch albo powoduje spowolnienie ruchu. W każdym przypadku siła tarcia jest proporcjonalna do nacisku:

$$T = \mu N = \mu mg \cos\alpha\ , \tag{21.13}$$

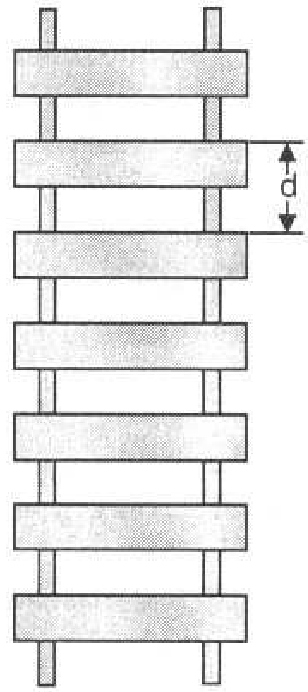
gdzie μ jest *współczynnikiem tarcia* zależnym od rodzaju powierzchni ciała i podłoża. W zakresie niewielkich prędkości wartość μ jest stała.

Pomiary i obliczenia

W ćwiczeniu badamy dwa przypadki ruchu jednostajnie przyspieszonego:
- spadek swobodny – w celu wyznaczenia przyspieszenia ziemskiego,
- ruch na równi pochyłej – w celu wyznaczenia współczynnika tarcia.



Rys. 21.1. Siły działające na równi pochyłej.



Rys. 21.2. Drabinka do wyznaczania przyspieszenia ziemskiego

W obu przypadkach korzystamy z komputerowego zestawu pomiarowego opisanego w rozdziale 12.

Spadek swobodny

W ćwiczeniu obserwujemy spadek swobodny drabinki przedstawionej na rys. 21.2. Jako czujnik stosujemy fotobramkę, która mierzy bezpośrednio czas przechodzenia kolejnych poprzeczek. Przed rozpoczęciem pomiarów do programu musi być wprowadzony parametr – odległość między sąsiednimi poprzeczkami d. Para-

metr wpisuje się do okienka otwieranego przez kliknięcie na ikonę czujnika w oknie ustawień.

Na podstawie zmierzonych czasów program może obliczyć przebytą drogę, prędkość między kolejnymi poprzeczkami, a także przyspieszenie na poszczególnych odcinkach. Sposób wyboru i forma prezentacji danych zostały opisane w rozdziale 12. W tym ćwiczeniu wyniki przedstawiamy w postaci wykresów drogi i prędkości (dwa wykresy) w funkcji czasu. Okna zawierające te wykresy należy otworzyć przed rozpoczęciem pomiarów. Ponadto na wykresie prędkości należy włączyć `Statystykę` i wybrać `Dopasowanie krzywej` i `f. liniowa`.

Wykres drogi traktujemy jakościowo. Służy on nam tylko do wizualnego sprawdzenia, czy odpowiednia zależność jest wielomianem drugiego stopnia, zgodnie z równaniem (21.7).

Wykres prędkości posłuży do wyznaczenia przyspieszenia ziemskiego. W przypadku spadku swobodnego w równaniu (21.5) zamieniamy ogólne przyspieszenie na przyspieszenie ziemskie g

$$v = v_0 + gt . \tag{21.14}$$

Z powyższego równania widać, że prędkość zależy liniowo od czasu, a g jest współczynnikiem nachylenia prostej opisującej zależność $v(t)$. Wartość g znajdziemy z regresji liniowej.

W `polu statystyki` widzimy równanie liniowe $y = a_1 + a_2 x$ oraz wartości a_1 i a_2 obliczone metodą regresji liniowej. W odniesieniu do naszego wykresu $a_1 = v_0$ i $a_2 = g$. Należy sprawdzić, czy punkty pomiarowe układają się wokół linii prostej. Jeżeli nie, należy wybrać odpowiedni zakres pomiarów, w którym warunek ten będzie spełniony.

Ruch po równi pochyłej

Do wyznaczania współczynnika tarcia stosujemy równię pochyłą przedstawioną na rys. 21.1 oraz pomiarowy układ komputerowy z czujnikiem w postaci fotobramki z krążkiem.

Na wózek o masie m działa siła zsuwająca F oraz siła B skierowana w kierunku przeciwnym i będąca sumą siły tarcia T i naprężenia nici S. Druga zasada dynamiki dla wózka przyjmie zatem postać:

$$ma = F - T - S , \tag{21.15}$$

a dla przeciwwagi

$$m_1 a = S - m_1 g . \tag{21.16}$$

Z ostatniego równania obliczamy S i wstawiamy do wzoru (21.15) razem z obliczonymi wcześniej wyrażeniami na T i F. Otrzymujemy równanie:

$$ma = mg\sin\alpha - \mu\, mg\cos\alpha - m_1(a+g)) , \tag{21.17}$$

z którego ostatecznie wyliczamy współczynnik tarcia:

$$\mu = \frac{m(g\sin\alpha - a) - m_1(a+g)}{mg\cos\alpha}. \tag{21.18}$$

Z powyższego równania wynika, że obliczenie μ wymaga znajomości mas wózka i przeciwwagi, kąta nachylenia równi oraz przyspieszenia wózka. Masy wyznaczamy za pomocą wagi, a kąt nachylenia – z pomiarów wysokości i długości równi. Do wyznaczenia przyspieszenia stosujemy zestaw komputerowy.

Przeciwwaga jest połączona z wózkiem za pomocą nici przerzuconej przez krążek znajdujący się między ramionami fotobramki. Obracający się krążek powoduje wytwarzanie impulsów napięcia odzwierciedlających zasłonięcie lub odsłonięcie detektora fotobramki przez otwory krążka. Układ pomiarowy mierzy bezpośrednio czas obrotu między sąsiednimi otworami. Po wprowadzeniu długości łuku odpowiadającej obrotowi między sąsiednimi otworami program może obliczyć przebytą przez wózek drogę oraz prędkość lub przyspieszenie w kolejnych punktach. Ten parametr wpisuje się do okienka otwieranego przez kliknięcie na ikonę czujnika w oknie ustawień.

Ruch na równi jest ruchem jednostajnie przyspieszonym; prędkość wózka jest opisana równaniem (21.5). Jest to równanie liniowe $v(t)$, w którym współczynnik nachylenia wynosi a. Po włączeniu `Statystyki` w okienku wykresu prędkości należy wybrać `Dopasowanie krzywej` i `f. liniowa`. W `polu statystyki` pojawia się równanie $y = a_1 + a_2 x$ oraz wartości a_1 i a_2 obliczone metodą regresji liniowej. W odniesieniu do naszego wykresu $a_1 = v_0$ i $a_2 = a$. Należy sprawdzić, czy punkty pomiarowe układają się wokół linii prostej. Jeżeli nie, należy wybrać odpowiedni zakres pomiarów, w którym warunek ten będzie spełniony.

W ten sposób znajdujemy wartość przyspieszenia. Po wstawieniu wszystkich zmierzonych wartości do równania (21.18) obliczamy współczynnik tarcia. Pomiary i obliczenia można powtórzyć dla różnych kątów nachylenia równi oraz dla różnych obciążeń przeciwwagi.

Przebieg ćwiczenia

1. Włączyć komputer i interfejs oraz otworzyć program *Science Workshop*.
2. Połączyć fizycznie fotobramkę z interfejsem przez włożenie wtyku do gniazda cyfrowego.
3. Połączyć logicznie fotobramkę z interfejsem w oknie ustawień przez przeciągnięcie wtyku cyfrowego do wybranego gniazda cyfrowego oraz wybranie fotobramki z listy czujników.
4. Otworzyć okno zawierające wykres drogi i prędkości.
5. Otworzyć `Pole statystyki` i zaznaczyć `Dopasowanie krzywej` i dalej wybrać `f. liniowa`.
6. Wykonać pomiar, puszczając drabinkę przez fotobramkę.

7. Z `pola statystyki` odczytać współczynnik nachylenia; jest to przyspieszenie ziemskie.
8. Połączyć fizycznie fotobramkę + krążek z interfejsem przez włożenie wtyku do wolnego gniazda cyfrowego.
9. Połączyć logicznie fotobramkę z interfejsem w oknie ustawień przez przeciągnięcie wtyku cyfrowego do gniazda cyfrowego oraz wybranie fotobramki z krążkiem z listy czujników.
10. Używając przycisku `Źródło danych`, otworzyć okno zawierające wykres drogi i prędkości.
11. Otworzyć `Pole statystyki` i zaznaczyć `Dopasowanie krzywej` i dalej wybrać `f.liniowa`.
12. Zważyć wózek i przeciwwagę oraz określić kąt nachylenia równi.
13. Wykonać pomiar, puszczając wózek w dół równi.
14. Z `pola statystyki` odczytać współczynnik nachylenia; jest to przyspieszenie wózka.
15. Obliczyć współczynnik tarcia ze wzoru (21.18).
16. Powtórzyć punkty 13–15 dla innych mas i kątów nachylenia.
17. Obliczyć średnią wartość współczynnika tarcia i odchylenie standardowe.
18. Zaokrąglić wyniki i podać postać ostateczną.

Zestaw ćwiczeniowy

Komputer, interfejs, dwie fotobramki, drabinka, równia pochyła

Pojęcia kluczowe

- Rodzaj ruchu a działająca siła, definicje prędkości i przyspieszenia
- Ruch jednostajnie zmienny: zależność prędkości i drogi od czasu
- Prawo powszechnej grawitacji, przyspieszenie ziemskie jako funkcja odległości od środka Ziemi
- Siła zsuwająca, siła nacisku i siła tarcia na równi pochyłej
- II zasada dynamiki dla ruchu wózka z przeciwwagą
- Program obsługi pomiarów (patrz rozdz. 12), okno ustawień, otwieranie okna wykresu
- Przypisanie czujnika, wybór wykresu
- Statystyka: włączanie i wyłączanie, ustawianie opcji; dopasowanie funkcji, interpretacja parametrów dopasowania

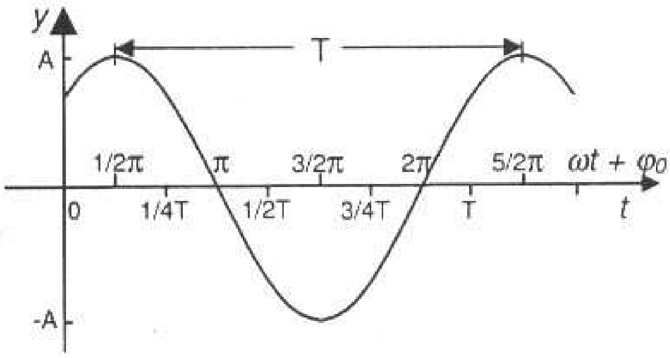
22. Wyznaczanie prędkości dźwięku w powietrzu metodą przesunięcia fazowego

Wprowadzenie

Rozchodzenie się dźwięku jest ruchem fali mechanicznej i może wystąpić tylko w ośrodku sprężystym. Jeżeli pewien element ośrodka, którego cząstki są ze sobą związane, pobudzimy do drgań, to energia drgań tego elementu będzie przekazywana do punktów sąsiednich i wywoła ich drgania.

Rozchodzenie się drgań w ośrodku nazywamy *falą*. Zauważmy, że w ruchu falowym cząsteczki ośrodka nie podążają za rozchodzącą się falą, lecz drgają wokół ustalonych położeń równowagi. Jeżeli kierunek drgań cząsteczek i kierunek rozchodzenia się fali są zgodne, falę nazywamy *podłużną*, jeżeli natomiast drgania cząsteczek odbywają się w kierunku prostopadłym do kierunku rozchodzenia się fali, falę nazywamy *poprzeczną*.

Charakter fali rozchodzącej się w ośrodku zależy od jego właściwości sprężystych. Jeżeli wskutek przesunięcia jednej warstwy ośrodka względem drugiej powstają siły sprężyste dążące do przywrócenia warstwy przesuniętej do położenia równowagi, to w ośrodku mogą się rozchodzić fale poprzeczne i podłużne (na ogół takim ośrodkiem jest ciało stałe). Gdy między przesuniętymi warstwami ośrodka siły sprężyste nie występują, to w ośrodku mogą się rozchodzić tylko fale podłużne (tak się dzieje w cieczach i gazach).



Rys. 22.1. Wychylenie w ruchu harmonicznym w funkcji czasu (t) lub fazy ($\omega t + \varphi_0$)

Najczęściej spotykanym ruchem drgającym jest *ruch harmoniczny*, w którym wychylenie y zmienia się w czasie t według równania

$$y = A\sin(\omega t + \varphi_0)\,, \tag{22.1}$$

gdzie: A – amplituda, ω – częstotliwość kołowa, φ_0 – faza początkowa.

Wyrażenie ($\omega t + \varphi_0$) jest *fazą* ruchu drgającego. W praktyce znajdujemy fazę danego ruchu jako kąt, dla którego wykres nieprzesuniętej funkcji sinus ma taki sam stan wychylenia. Na przykład, malejące wychylenie o wartości $A/2$ ma fazę równą $5/6\pi$ lub 150°.

Faza początkowa określa stan ruchu w chwili $t = 0$ i jest obierana w sposób dowolny. Obierając np. $\varphi = 0$, przyjmujemy, że w chwili $t = 0$ punkt drgający przechodzi przez położenie równowagi na stronę wychyleń dodatnich. Fazę wyrażamy w jednostkach kątowych (stopniach lub radianach). Przykładowy wykres ruchu harmonicznego z zaznaczeniem niektórych faz przedstawiono na rys. 22.1.

Ruch harmoniczny można wyrazić zarówno funkcją sinus, jak i kosinus, jeżeli tylko odpowiednio wybierzemy fazę początkową.

Równanie (22.1) opisuje drganie wybranego elementu na linii rozchodzenia się fali. Ten element ma określoną współrzędną x i wykonuje tylko ruchy lokalne wokół ustalonego położenia. Chcąc opisać ruch całej fali, trzeba znaleźć funkcję zawierającą dwie zmienne: położenie x na drodze fali oraz czas t. Jeżeli fala biegnie w kierunku osi x, to kolejne punkty ośrodka są pobudzane do drgań i osiągają tę samą fazę z pewnym opóźnieniem. Prędkość przesuwania się wychylenia o stałej fazie jest *prędkością* rozchodzenia się fali.

Wychylenie z położenia równowagi y dowolnej cząstki w chwili t w odległości x od źródła drgań jest opisane funkcją falową postaci:

$$y = A\sin(\omega t - kx - \varphi_0), \tag{22.2}$$

gdzie: A – amplituda, ω – częstotliwość kołowa, k – liczba falowa ($k = 2\pi/\lambda$, gdzie λ – długość fali), φ_0 – faza początkowa. Wyrażenie ($\omega t - kx + \varphi_0$) jest fazą fali.

Równanie fali jest podwójnie okresowe: względem czasu i przestrzeni. Przy ustalonej wartości x opisuje ono drgania cząstki wokół położenia równowagi – drgania te są periodyczne z *okresem* T. Po ustaleniu w równaniu (22.2) czasu otrzymujemy zależność wychylenia cząstek od ich położenia w określonej chwili – zależność ta przedstawia *kształt fali*. Odległość między najbliższymi punktami mającymi tę samą fazę nazywamy *długością fali*.

Związek między okresem a długością fali znajdziemy, rozpatrując ruch wychylenia o stałej fazie. Stałość fazy wyrazimy równaniem:

$$\omega t - kx + \varphi_0 = \text{const.} \tag{22.3}$$

Aby obliczyć prędkość przesuwania się stałej fazy, znajdujemy pochodną położenia względem czasu:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k}. \tag{22.4}$$

Po wstawieniu definicyjnych określeń w miejsce ω i k oraz po oznaczeniu $dx/dt = \upsilon$ otrzymujemy związek między prędkością υ, okresem T i długością fali:

$$\upsilon = \frac{\lambda}{T}. \tag{22.5}$$

Zatem długość fali jest drogą przebywaną przez falę w czasie jednego okresu.

Fale akustyczne mogą się rozchodzić w ciałach stałych, cieczach i gazach. Fale akustyczne, których częstotliwość jest zawarta w przedziale od 20 Hz do 20 000 Hz, nazywamy *falami słyszalnymi*, gdyż wywołują one w mózgu człowieka wrażenie słuchowe. Źródłem fal słyszalnych są drgające *struny* (np.

skrzypce, ludzkie struny głosowe), drgające *słupy powietrza* (np. piszczałki, organy, klarnet) oraz drgające *płyty* i *membrany* (np. bęben, głośnik). Te drgające przedmioty na przemian zagęszczają i rozrzedzają otaczające powietrze, powodując ruch cząsteczek do przodu i do tyłu. Powietrze przenosi to zaburzenie od źródła w przestrzeń.

Wrażenie odbieranego dźwięku jest określone przez jego *natężenie*, *wysokość* i *barwę*. Wymienione cechy dźwięku zależą od odpowiednich parametrów falowych – amplitudy, częstotliwości oraz zawartości drgań harmonicznych.

Prędkość fali w powietrzu

Ogólne wyrażenie określające prędkość rozchodzenia się fal podłużnych w ośrodku ciągłym ma postać:

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \tag{22.6}$$

gdzie: E oznacza moduł Younga ośrodka, ρ – jego gęstość.

Przekształcając podstawową postać prawa Hooke'a (patrz rozdz. 18), możemy napisać:

$$E = -\frac{dp}{dV/V}, \tag{22.7}$$

gdzie dp i dV oznaczają odpowiednio różniczkowe zmiany ciśnienia i objętości gazu o objętości V.

Drgania dźwiękowe zachodzą tak szybko, że ściskanie i rozrzedzanie gazu można uważać za procesy adiabatyczne, wobec czego zmiana stanu gazu zachodzi zgodnie ze wzorem *Poissona*

$$pV^{\kappa} = \text{const}, \tag{22.8}$$

gdzie κ jest stosunkiem ciepła właściwego przy stałym ciśnieniu do ciepła właściwego przy stałej objętości (dla gazów 2-atomowych $\kappa = 1{,}4$).

Po zróżniczkowaniu wzoru Poissona otrzymujemy:

$$V^{\kappa}dp + \kappa V^{\kappa-1}pdV = 0,$$

a stąd

$$\frac{dp}{dV/V} = -\kappa p. \tag{22.9}$$

Po podstawieniu uzyskanej wartości do równania (22.7), a następnie uwzględnieniu otrzymanej w ten sposób postaci modułu Younga w równaniu (22.6) wyrażamy prędkość fali podłużnej wzorem:

$$v = \sqrt{\frac{\kappa p}{\rho}} . \tag{22.10}$$

Aby wyeliminować gęstość ρ, bierzemy definicję tej wielkości i mnożymy licznik i mianownik przez p – ciśnienie gazu. Zauważamy, że w mianowniku mamy iloczyn pV, który możemy zastąpić iloczynem nRT na podstawie równania stanu gazu:

$$\rho = \frac{m}{V}\frac{p}{p} = \frac{mp}{nRT} , \tag{22.11}$$

gdzie: m – masa gazu, n – liczba moli gazu, R – stała gazowa, T – temperatura.

Liczbę moli n można wyrazić jako stosunek całej masy gazu m do masy 1 mola μ: $n = m/\mu$. Uwzględniwszy powyższe w równaniu (22.11), wstawiamy wartość ρ do równania (22.10) i otrzymujemy wzór na *prędkość dźwięku* w zależności od rodzaju gazu i temperatury:

$$v = \sqrt{\frac{\kappa RT}{\mu}} . \tag{22.12}$$

Zasada pomiaru

Celem ćwiczenia jest wyznaczenie prędkości dźwięku v w powietrzu na podstawie związku

$$v = \lambda f , \tag{22.13}$$

gdzie λ jest długością fali, a f – częstotliwością.

Częstotliwość jest mierzona bezpośrednio miernikiem, natomiast do wyznaczenia długości fali zastosujemy metodę objaśnioną poniżej.

Na jednym z końców poziomej ławy ustawiamy głośnik połączony z generatorem drgań elektrycznych pełniący funkcję źródła fal (rys. 22.2). Do ich odbioru używamy mikrofonu przesuwanego na ruchomym wózku wzdłuż ławy.

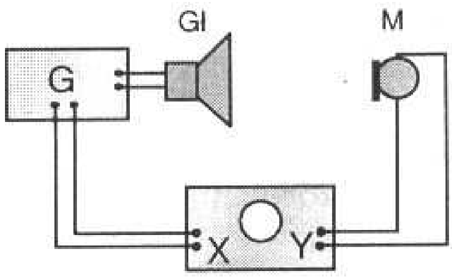
Napięcie głośnika przykładamy do płytek X oscyloskopu, a napięcie z mikrofonu podajemy na płytki Y. Oba napięcia są zmienne w czasie i odzwierciedlają ruch drgający cząsteczek powietrza. Na ekranie oscyloskopu otrzymamy obraz w postaci tzw. *figur Lissajous* (rys. 22.3).

Figura Lissajous jest wynikiem nałożenia się dwóch ruchów harmonicznych, których kierunki drgań są względem siebie prostopadłe. Jej kształt zależy od różnicy faz drgań składowych oraz od stosunku ich częstotliwości. W naszym ćwiczeniu częstotliwość obu drgań jest równa, więc o kształcie figur Lissajous

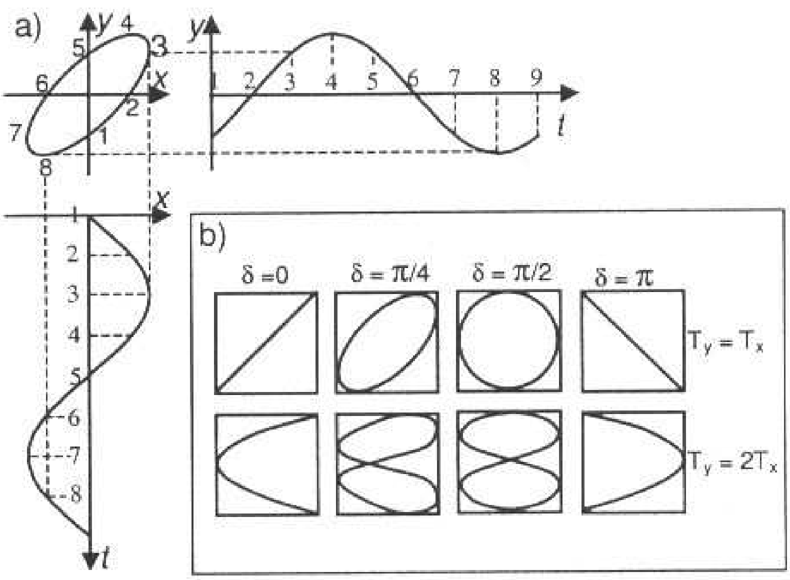
decyduje różnica faz głośnika i mikrofonu. Jeżeli przyjmiemy położenie głośnika $x = 0$, to faza jego drgań φ_g w pewnej chwili t, zgodnie z równaniem (22.2), wynosi $\omega t + \varphi_0$. W tej samej chwili do mikrofonu dochodzi fala wytworzona przez odpowiednio wcześniejsze drganie głośnika. Drgania mikrofonu oddalonego od głośnika o x mają w tym momencie fazę $\varphi_m = \omega t - kx + \varphi_0$. Różnica faz obu drgań

$$\varphi_g - \varphi_m = kx = 2\pi \frac{x}{\lambda}. \qquad (22.14)$$

Jak widać, różnica faz zmienia się o 2π przy przesunięciu mikrofonu o λ.



Rys. 22.2. Schemat blokowy układu elektrycznego; G – generator napięcia sinusoidalnego, M – mikrofon, Gł – głośnik, X,Y – wejścia oscyloskopu



Rys. 22.3. Konstrukcja figury Lissajous dla różnicy faz 45° (a) oraz przykłady figur Lissajous dla innych różnic faz i okresów (b)

Kształt figury Lissajous jest periodyczną (o okresie 2π) funkcją różnicy faz – będzie on taki sam dla wszystkich położeń mikrofonu różniących się o całkowitą wielokrotność długości fali.

Powyższą właściwość wykorzystujemy do pomiaru długości fali dźwiękowej. W tym celu wyznaczamy odległość między sąsiednimi położeniami mikrofonu, przy których otrzymujemy ten sam kształt figury Lissajous. Najdokładniejsze wyniki otrzymuje się, gdy figura Lissajous jest linią prostą (czyli gdy różnica faz wynosi 0, 2π, 4π...).

Znając długość fali oraz częstotliwość f (jej wartość odczytujemy na skali generatora lub częstościomierza), obliczamy prędkość dźwięku ze wzoru (22.13). W celu zwiększenia dokładności wykonujemy pomiary dla kilku położeń mikrofonu i kilku wartości częstotliwości. Poprawność uzyskanego wyniku możemy

sprawdzić, porównując go z wartością uzyskaną teoretycznie na podstawie wzoru (22.12).

Przebieg ćwiczenia

1. Połączyć układ elektryczny według schematu na rys. 22.2. Głośnik dołączamy do wyjścia mocy generatora, a płytki *X* oscyloskopu do wyjścia napięciowego. Oba wyjścia mają tę samą fazę, lecz ich amplitudy są regulowane niezależnie. Jeżeli wyjście napięciowe nie występuje, głośnik i oscyloskop dołączamy do tych samych zacisków.
2. Uruchomić generator akustyczny, nastawić wybraną częstotliwość.
3. Uruchomić oscyloskop.
4. Potencjometrami wzmocnienia *X* i *Y* oscyloskopu ustawić obraz o wielkości około 1/2 wielkości ekranu.
5. Zmieniając odległość mikrofonu od głośnika w całym możliwym zakresie, znaleźć położenia, w których obraz na ekranie jest linią prostą o takim samym znaku współczynnika nachylenia. Oszacować, czy odległości między kolejnymi położeniami są w przybliżeniu takie same. Gdy nie są, pomiary należy odrzucić, gdyż oznacza to, że wystąpiły efekty dodatkowe.
6. Obliczyć średnią różnicę położeń mikrofonu oraz długość fali.
7. Dla obliczonej długości fali obliczyć prędkość dźwięku z równania (22.13).
8. Obliczyć prędkość dźwięku dla kilku innych częstotliwości.
9. Obliczyć średnią prędkość dźwięku oraz odchylenie standardowe średniej.
10. Obliczyć prędkość dźwięku na podstawie równania (22.12) i porównać z wynikiem eksperymentalnym.

Zestaw ćwiczeniowy

Ława optyczna, głośnik, mikrofon (ew. wzmacniacz mikrofonowy), generator akustyczny, oscyloskop

Pojęcia kluczowe

- Mechanizm rozchodzenia się fal w ośrodku sprężystym, fale podłużne i poprzeczne
- Ruch harmoniczny: zależność wychylenia od czasu, faza, faza początkowa
- Ruch falowy: zależność wychylenia od czasu i przestrzeni, okres, długość fali, prędkość fali
- Fale akustyczne, cechy dźwięku
- Prawo Hooke'a, przemiana adiabatyczna, równanie Poissona, wyprowadzenie wzoru na prędkość dźwięku w gazie
- Pomiar długości fali z przesunięcia fazowego
- Konstrukcja figur Lissajous

23. Wyznaczanie współczynnika przewodnictwa cieplnego metali

Wprowadzenie

Przewodnictwo cieplne polega na przekazywaniu ciepła od pewnego elementu ciała do elementów sąsiednich poprzez przekazywanie energii kinetycznej bezładnego ruchu cieplnego od jednych drobin do drugich w wyniku zderzeń.

Rozważmy przepływ ciepła w pręcie o długości l i powierzchni przekroju A. Wybierzmy z niego myślowo plasterek o grubości dx, którego powierzchnie przednia i tylna są utrzymywane w stałej, ale różnej temperaturze. *Strumień ciepła* ϕ przepływający przez przekrój pręta określamy jako stosunek ilości ciepła do czasu:

$$\phi = \frac{dQ}{dt}. \tag{23.1}$$

Strumień ciepła jest proporcjonalny do powierzchni przekroju A i różnicy temperatury dT na odcinku dx. To stwierdzenie jest podstawowym *prawem przewodnictwa* , a jego wyrazem matematycznym jest równanie:

$$\phi = -\lambda A \frac{dT}{dx}. \tag{23.2}$$

Wielkość λ nazywamy współczynnikiem przewodnictwa cieplnego, jego wymiarem jest $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$; dT/dx jest gradientem temperatury, oznacza zmianę temperatury w punktach odległych o jednostkę długości.

Jeżeli pręt ma stały przekrój i jest doskonale izolowany (strumień ciepła może wtedy płynąć tylko wzdłuż osi pręta, a nie przez powierzchnię boczną), to w równaniu (23.2) możemy rozdzielić zmienne i obie strony bezpośrednio scałkować. Granice całkowania są określone przez warunki brzegowe, które ustalamy następująco: gdy $x = 0$, $T = T_1$, oraz gdy $x = l$, $T = T_0$, co oznacza, że na początku pręta utrzymujemy stałą temperaturę T_1, a na końcu temperaturę T_0. Całka z przekształconego równania (23.2) ma postać:

$$\int_{T_1}^{T_0} dT = -\frac{\phi}{\lambda A} \int_0^l dx, \tag{23.3}$$

a wynikiem całkowania jest równanie:

$$T_1 - T_0 = \frac{\Phi l}{\lambda A}. \tag{23.4}$$

Z powyższego równania możemy łatwo odczytać znaczenie współczynnika przewodnictwa cieplnego. Mianowicie, gdy λ jest duże, wówczas na utrzymanie

stałej różnicy temperatury $T_1 - T_0$ jest potrzebny duży strumień ciepła. W przeciwnym przypadku przekazywanie ciepła do zimnego końca jest powolne – do podtrzymania różnicy temperatury wystarczy mały strumień ciepła.

Jeśli strumień Φ będzie stały dla prętów z różnych materiałów, to na końcach pręta dobrze przewodzącego wytworzy się niewielka różnica temperatury. Różnica ta wzrośnie w przypadku pręta o mniejszym współczynniku przewodnictwa.

Rozkład temperatury wzdłuż pręta otrzymamy, całkując równanie (23.2) od dowolnego punktu x (w punkcie x temperaturę oznaczymy przez T) do końca pręta ($x = l$, $T = T_0$). Wykorzystując ponadto równanie (23.4), otrzymujemy

$$T - T_0 = (T_1 - T_0)\left(1 - \frac{x}{l}\right). \tag{23.5}$$

Należy pamiętać, że równanie (23.5) opisuje rozkład temperatury wzdłuż pręta tylko wtedy, gdy jest on dobrze izolowany, tzn. nie występuje przypływ ciepła przez powierzchnie boczne. W tym przypadku temperatura spada liniowo wraz ze wzrostem odległości od ciepłego końca.

Gdy powierzchnia boczna nie jest izolowana cieplnie, strumień przepływający przez kolejne przekroje jest coraz mniejszy na skutek ucieczki ciepła do otoczenia. Z uwagi na to, że strumień ciepła przepływający przez ściany boczne jest proporcjonalny do różnicy temperatury między danym punktem a otoczeniem (jest to tzw. *prawo ostygania*), równanie opisujące rozkład temperatury w tym przypadku ma postać:

$$T - T_0 = (T_1 - T_0)e^{-hx}, \tag{23.6}$$

gdzie h jest stałą charakteryzującą pręt i ośrodek zewnętrzny.

Dobrymi przewodnikami ciepła są ciała, których przewodnictwo elektryczne jest również duże. Według *prawa Wiedemanna-Franza* stosunek przewodnictwa cieplnego λ do przewodnictwa elektrycznego σ jest proporcjonalny do temperatury i nie zależy od rodzaju ciała

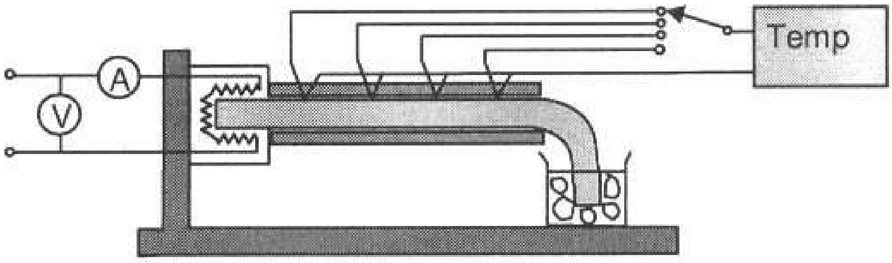
$$\frac{\lambda}{\sigma} = cT. \tag{23.7}$$

Z tego prawa wynika, że dobre przewodniki prądu są również dobrymi przewodnikami ciepła i odwrotnie.

Pomiary i obliczenia

Do wyznaczenia współczynnika przewodnictwa cieplnego metali stosujemy układ pomiarowy przedstawiony na rys. 23.1. Jeden koniec pręta umieszczamy we wnętrzu grzejnika elektrycznego, a drugi – w zbiorniku o dużej pojemności cieplnej (może nim być naczynie zawierające mieszaninę wody z lodem), co zapewnia

stałą temperaturę. Pręt jest izolowany cieplnie od otoczenia, możemy więc wykorzystać bezpośrednio równanie (23.2). Do pomiaru temperatury pręta w kilku miejscach pręta służą termopary. Napięcie termoelektryczne powstające w termoparze



Rys. 23.1. Zestaw do wyznaczania przewodnictwa cieplnego

jest proporcjonalne do różnicy między temperaturą w danym punkcie pręta a temperaturą otoczenia. Odpowiadające sobie wartości napięcia termoelektrycznego i różnic temperatury są podane w tablicach. Temperaturę znajdujemy albo za pomocą miliwoltomierza i tablicy napięć termoelektrycznych, albo za pomocą układu elektronicznego ze wskaźnikiem pokazującym bezpośrednio temperaturę.

Strumień ciepła płynący przez pręt pochodzi od grzejnika. Całkowity strumień wytwarzany przez grzejnik jest mocą płynącego przezeń prądu. Jednakże tylko część tej mocy jest przekazywana prętowi, reszta jest oddawana do otoczenia. Strumień ciepła przekazywany prętowi można wyrazić w postaci:

$$\phi = \eta U i \,, \tag{23.8}$$

gdzie: η – sprawność grzejnika, U, i – napięcie i natężenie prądu w grzejniku.

Gdy *sprawność grzejnika* nie jest znana, można ją wyznaczyć doświadczalnie. W tym celu przy określonym napięciu i natężeniu (U, i) mierzymy temperaturę we wnętrzu piecyka, w którym jest pręt, a następnie wyjmujemy pręt i ustalamy nową wartość strumienia (przy napięciu U_0 i prądzie i_0), przy którym temperatura ma poprzednią wartość. Oczywiste jest, że ten strumień ciepła nie jest przekazywany do pręta, a więc

$$\phi = U i - U_0 i_0 \,. \tag{23.9}$$

Do wyznaczenia wartości λ w zasadzie wystarczyłyby tylko dwa punkty pomiarowe. Jednak pomiar temperatury w kilku miejscach pręta jest konieczny, aby sprawdzić rozkład temperatury. Tylko przy rozkładzie liniowym gradient temperatury jest stały wzdłuż całego pręta i jest równy współczynnikowi nachylenia a na wykresie temperatury względem odległości od początku pręta, co można zapisać w postaci:

$$\frac{dT}{dx} = a \,. \tag{23.10}$$

Wstawimy teraz wyrażenie na gradient temperatury (ostatni wzór) oraz wyrażenie na strumień (wzór 23.8) do równania (23.2) i po przekształceniu otrzymamy praktyczne wyrażenie określające sposób obliczenia współczynnika przewodnictwa cieplnego:

$$\lambda = -\frac{\eta U i}{aA}. \quad (23.11)$$

Przebieg ćwiczenia

1. Zmierzyć odległości między punktami pomiaru temperatury oraz średnicę pręta.
2. Połączyć obwód grzejnika i obwód termopar według rys. 23.1. Naczynie napełnić wodą z lodem.
3. Włączyć grzejnik i poczekać na ustalenie się temperatury. W odstępach około 5 min mierzyć temperaturę w kilku punktach pręta i notować wartości w tabelce. Mierzony punkt wybieramy za pomocą przełącznika. Przepływ uznajemy za ustalony, jeżeli kolejny pomiar wykaże wartości bliskie poprzednio zmierzonym we wszystkich punktach Do obliczeń wykorzystujemy tylko wartości temperatury z ostatniego pomiaru.
4. W stanie ustalonym zmierzyć napięcie i prąd grzejników. Jeżeli oba grzejniki podłączone są szeregowo do źródła napięcia, to napięcie na każdym z grzejników jest równe połowie napięcia źródła, a prąd płynący przez oba grzejniki jest taki sam.
5. Używając termopary i miliwoltomierza, sporządzić na podstawie tablic wykres zależności napięcia termoelektrycznego od różnicy temperatury i z wykresu znaleźć temperaturę w kolejnych punktach pomiarowych. W przypadku bezpośredniego odczytu temperatury zanotować odczytane wartości.
6. Wykreślić zależność temperatury w pręcie od odległości. Za początek układu można przyjąć położenie pierwszego punktu pomiarowego.
7. Znaleźć współczynnik nachylenia wykresu oraz jego błąd, stosując regresję liniową.
8. Obliczyć współczynnik przewodnictwa cieplnego za pomocą równania (23.11).
9. Obliczyć błąd współczynnika przewodnictwa cieplnego, najlepiej metodą różniczki logarytmicznej.
10. Pomiar można powtórzyć dla innych wartości napięcia grzejnika i dla każdej z nich powtórzyć czynności wymienione w punktach 3–8. W przypadku kilku powtórzeń obliczyć średni współczynnik przewodnictwa cieplnego oraz odchylenie standardowe.
11. Przedstawić końcową postać wyniku i błędu, stosując odpowiednie zaokrąglenia.

Zestaw ćwiczeniowy

Stanowisko zawierające badane pręty, autotransformator, woltomierz, miliwoltomierz i amperomierz, przełącznik wielopozycyjny, zbiornik wody z lodem

Pojęcia kluczowe

- Przekazywanie ciepła, strumień ciepła
- Prawo przewodnictwa cieplnego, współczynnik przewodnictwa
- Rozkład temperatury w pręcie izolowanym i nieizolowanym, gradient temperatury
- Prawo Wiedemanna-Franza
- Termopara (termoogniwo) (rozdz. 29)
- Sprawność grzejnika
- Zasada wyznaczania współczynnika przewodnictwa cieplnego

24. Wyznaczanie współczynnika rozszerzalności liniowej ciał stałych

Wprowadzenie

Zmianie temperatury ciała towarzyszy na ogół zmiana jego wymiarów liniowych, a więc także zmiana objętości. Elementarny przyrost temperatury dT ciała, którego długość całkowita wynosi l, powoduje przyrost długości dl określony wzorem:

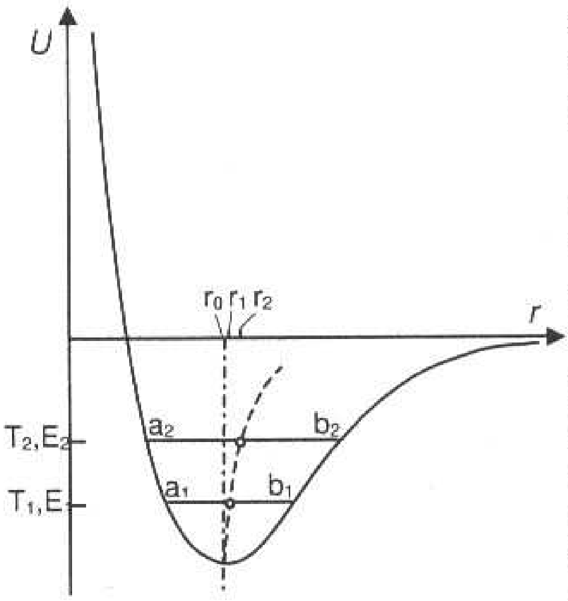
$$dl = \alpha l \, dT \ . \tag{24.1}$$

Współczynnik α nazywamy *współczynnikiem rozszerzalności liniowej*. Jego wartość liczbowa jest równa względnemu przyrostowi długości dl/l spowodowanemu zmianą temperatury o 1°C i zależy od rodzaju ciała, a także od temperatury. W związku z zależnością współczynnika α od temperatury długość ciała jest na ogół nieliniową funkcją temperatury. W zakresie niewielkich zmian temperatury w przybliżeniu można przyjąć, że współczynnik α jest stały, a długość wzrasta wprost proporcjonalnie do temperatury. W tej sytuacji odpowiednikiem wzoru (24.1) jest wzór następujący:

$$l - l_0 = \alpha_{\text{sr}} l_0 \Delta T \ , \tag{24.2}$$

który umożliwia proste obliczenie długości w dowolnej temperaturze.

Przyczyny zjawiska rozszerzalności cieplnej należy szukać w strukturze mikroskopowej ciał. Ciała stałe są zbudowane z atomów (jonów) rozłożonych regularnie w przestrzeni i tworzących *sieć krystaliczną*. Atomy są ze sobą powiązane siłami pochodzenia elektrycznego, co uniemożliwia im trwałą zmianę położenia. Dostarczona do kryształu energia cieplna wywołuje drgania atomów wokół położeń równowagi. Amplituda tych drgań rośnie wraz z temperaturą. Częstotliwość drgań cieplnych atomów sięga 10^{13} Hz. W tej sytuacji pojęcie odległości międzyatomowej ma sens tylko jako odległość między środkami drgań sąsiednich atomów.



Rys. 24.1. Energia potencjalna dwóch atomów w funkcji ich wzajemnej odległości

Energia potencjalna dwóch oddziałujących ze sobą atomów jako funkcja odległości między atomami jest wyrażona krzywą przedstawioną na rys. 24.1.

Gdyby energia kinetyczna atomów była równa zeru, znajdowałyby się one w odległości r_0 od siebie, a przy tej odległości energia potencjalna ma minimum. W rzeczywistości atomy wykonują drgania wokół położeń równowagi, tzn. mają określoną energię kinetyczną, która wzrasta ze wzrostem temperatury. W temperaturze T_1 odległość między atomami zmienia się od a_1 do b_1. Wskutek asymetrii krzywej potencjalnej średnie położenie drgającej cząsteczki nie będzie się pokrywać z wartością r_0, lecz przesunie się w prawo i osiągnie wartość r_1. Po podwyższeniu temperatury do T_2 atom przejdzie na wyższy poziom energetyczny E_2 – jego ruch drgający będzie się odbywał między punktami a_2 i b_2, a średnie położenie osiągnie wartość r_2.

Z powyższego opisu wynika, że wraz ze wzrostem temperatury rośnie nie tylko amplituda drgań atomów, lecz także średnia odległość między nimi, co makroskopowo przejawia się jako rozszerzalność cieplna.

Analogicznie do współczynnika rozszerzalności liniowej definiujemy *współczynnik rozszerzalności objętościowej:*

$$\gamma = \frac{dV}{V_0 dt}. \tag{24.3}$$

Objętość ciała po podgrzaniu o ΔT wyraża wzór:

$$V = V_0(1 + \gamma_{\text{sr}}\Delta t). \tag{24.4}$$

W celu znalezienia związku między α i γ rozważmy sześcian, którego krawędzie zwiększają długość zgodnie z równaniem (24.2). Objętość sześcianu w zależności od temperatury możemy wyrazić w postaci:

$$l^3 = l_0^3(1+\alpha_{\text{śr}}\Delta t)^3 . \tag{24.5}$$

Rozwinięcie sześcianu dwumianu zawiera iloczyn $\alpha\Delta t$ w potędze pierwszej, drugiej i trzeciej. Ponieważ ten iloczyn jest mały względem jedności, to druga i trzecia potęga tego iloczynu są bardzo małe i możemy je pominąć w rozwinięciu sześcianu dwumianu. Wobec powyższego równanie (24.5) możemy napisać w postaci:

$$l^3 \approx l_0^3(1+3\alpha_{\text{śr}}\Delta t) . \tag{24.6}$$

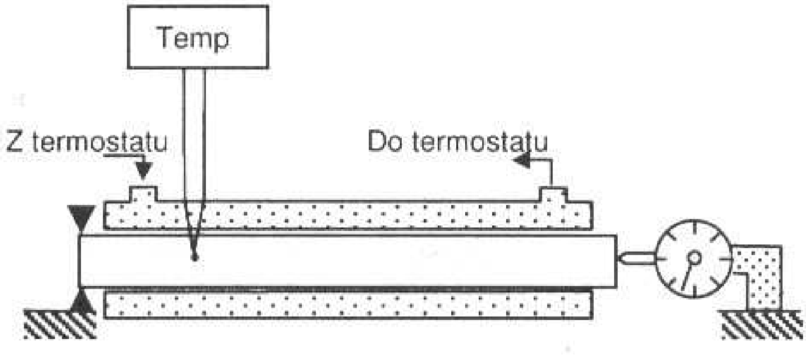
Porównując ostatnie równanie z równaniem (24.4), dochodzimy do wniosku, że

$$\gamma \approx 3\alpha . \tag{24.7}$$

Wartość współczynnika rozszerzalności liniowej w ciałach polikrystalicznych i amorficznych nie zależy od kierunku, natomiast w monokryształach (ciała anizotropowe) zależność od kierunku jest wyraźna – zamiast jednego występują tutaj trzy główne współczynniki rozszerzalności liniowej określane dla trzech osi krystalograficznych kryształu.

Zasada pomiaru

Badane ciało w postaci pręta umieszczamy w płaszczu wodnym (rys. 24.2) połączonym z termostatem Jeden koniec pręta jest umocowany w uchwycie, drugi natomiast przesuwa się w miarę podgrzewania. Wydłużenie pręta mierzymy czujnikiem mikrometrycznym, a temperaturę pręta mierzymy termometrem elektronicznym lub *termoparą* i miliwoltomierzem.



Rys. 24.2. Zestaw do pomiaru rozszerzalności liniowej

W celu obliczenia współczynnika rozszerzalności z danych pomiarowych napiszemy równanie (24.2) w postaci:

$$\Delta l = \alpha_{sr} l_0 T - \alpha_{sr} l_0 T_0 , \tag{24.8}$$

gdzie T_0 jest temperaturą początkową, w której długość pręta wynosi l_0.

Równanie (24.8) oznacza, że wydłużenie jest liniową funkcją temperatury i że współczynnik nachylenia linii

$$a = \alpha_{sr} l_0 . \tag{24.9}$$

Wartość a obliczamy, stosując regresję liniową do par danych (Δl, T). Jeżeli ponadto dokonamy pomiaru l_0, to równanie (24.9) może służyć do ostatecznego obliczenia współczynnika rozszerzalności.

Przebieg ćwiczenia

1. Zmierzyć długość początkową prętów.
2. Odczytać temperaturę początkową.
3. Ogrzewać badane pręty, stopniowo zmieniając nastawy ultratermostatu co 3–5 °C.
4. Po ustaleniu się danej temperatury mierzyć jej wartość i przyrost długości każdego pręta.
5. Gdy temperatura osiągnie około 90°C, kontynuować pomiary stygnięcia.
6. Wykonać wykres zależności wydłużenia od temperatury.
7. Obliczyć współczynnik nachylenia wykresu i jego błąd, stosując regresję liniową.
8. Obliczyć wartość współczynnika rozszerzalności z równania (24.9).
9. Obliczyć błąd, najłatwiej metodą różniczki logarytmicznej.
10. Przedstawić końcową postać wyników i błędów po zaokrągleniu.

Zestaw ćwiczeniowy

Badane pręty, grzejniki, lunetka do pomiaru długości, czujniki mikrometryczne (rozdz. 5), miliwoltomierz (rozdz. 11) lub termometr elektroniczny, termopary (rozdz. 29)

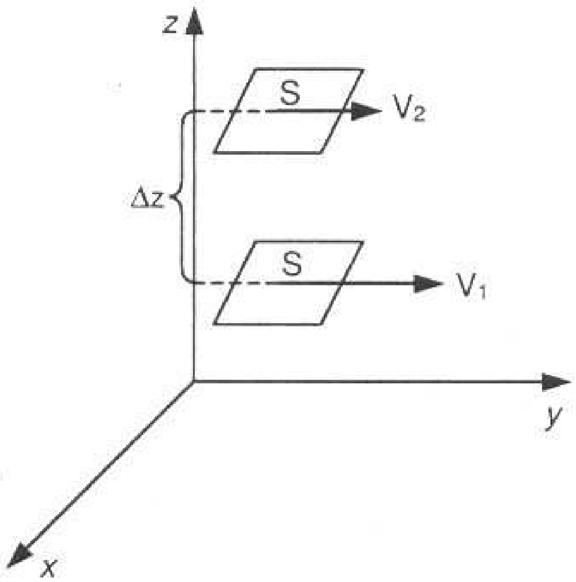
Pojęcia kluczowe

- Zmiana długości przy elementarnej zmianie temperatury, współczynnik rozszerzalności liniowej i objętościowej
- Długość i objętość w dowolnej temperaturze
- Wpływ temperatury na amplitudę drgań i odległość między atomami, energia potencjalna oddziaływania dwóch atomów
- Rozszerzalność ciał anizotropowych
- Pomiar temperatury
- Noniusz (rozdz. 5), ultratermostat (rozdz. 7).

25. Wyznaczanie zależności współczynnika lepkości od temperatury

Wprowadzenie

Drobiny w poruszającym się płynie (cieczy lub gazie) mają różną prędkość. Na przykład, w rurze prędkość cząstek bezpośrednio dotykających ścianki jest zerowa, cząstki oddalone od ścianki rury mają prędkość rosnącą z malejącą odległością od osi rury. Dowolny płyn możemy w myśli podzielić na warstwy w taki sposób, żeby wszystkie cząstki pojedynczej warstwy miały tę samą prędkość. Dla rury taka warstwa miałaby kształt cienkiego cylindra. W ogólnym przypadku kształt warstwy jest określony kształtem naczynia, w którym odbywa się przepływ.



Rys. 25.1. Ruch wybranych warstw płynu lepkiego

We wszystkich płynach rzeczywistych między warstwami występują siły tarcia. Od strony warstwy poruszającej się szybciej działa na warstwę poruszającą się wolniej siła przyspieszająca. Natomiast od strony warstwy poruszającej się wolniej na warstwę poruszającą się szybciej działa siła hamująca (rys. 25.1). Siły te, zwane siłami *tarcia wewnętrznego*, są skierowane stycznie do powierzchni warstw. Siła tarcia wewnętrznego (F_T) jest tym większa, im większe jest pole powierzchni (S) oraz im większy jest gradient prędkości w kierunku prostopadłym do ruchu (dv/dz)

$$F_r = \eta S \frac{dv}{dz} \ . \tag{25.1}$$

Gradient prędkości jest graniczną wartością stosunku $(v_1 - v_2)/\Delta z$ dla $z \to 0$, liczbowo jest równy różnicy prędkości warstw odległych o jednostkę długości. Wielkość η, zależną od rodzaju cieczy, nazywamy *współczynnikiem tarcia wewnętrznego* lub *współczynnikiem lepkości*. Wymiarem współczynnika lepkości jest kg/(m·s). Ciecz ma lepkość jednostkową, jeżeli siła 1 N działająca na powierzchnię 1 m^2 powoduje spadek prędkości o 1 m/s na odcinku z = 1 m. W rzadziej obecnie stosowanym układzie *CGS* używa się jednostki o wymiarze g/(cm·s), zwanej *puazem*. Obie jednostki dają się łatwo porównywać: 1 kg/(m·s) = 10 puazów.

Lepkość cieczy w znacznym stopniu zależy od temperatury; ze wzrostem temperatury jej wartość maleje. Zmiany temperaturowe lepkości gazów mają charakter odwrotny – lepkość gazu wzrasta z temperaturą.

Ciekawe zjawisko odkrył Kapica. Stwierdził on, że ciekły hel w temperaturze –271°C (2 K) przechodzi w stan *nadpłynności* polegający na tym, że jego lepkość jest równa zeru. Ciało stałe poruszające się w cieczy nielepkiej nie napotyka żadnego oporu, natomiast opór stawiany ciału przez ciecz lepką powoduje, że jego ruch pod działaniem stałej siły jest jednostajny (z wyjątkiem odcinka początkowego), a nie przyspieszony.

Ruch kulki w cieczy lepkiej opisał Stokes – w naszym ćwiczeniu wykorzystamy właściwości tego ruchu do wyznaczenia współczynnika lepkości.

Zasada pomiaru

Przy małych prędkościach kulki, gdy nie powstają wiry, siła oporu jest bezpośrednio uwarunkowana lepkością cieczy. Warstwa cieczy przylegająca bezpośrednio do kulki przylepia się do jej powierzchni i jest przez nią całkowicie unoszona. Ta warstwa pociąga za sobą warstwę następną, lecz jej prędkość jest mniejsza. Kolejne warstwy mają jeszcze mniejszą prędkość, co jest wynikiem działania sił tarcia wewnętrznego.

Według *prawa Stokesa* siła tarcia wewnętrznego jest wprost proporcjonalna do prędkości i promienia kulki, a wyraża ją wzór:

$$F_T = 6\pi\eta r\upsilon, \tag{25.2}$$

gdzie: r – promień, υ – prędkość kulki.

W ćwiczeniu kulka opada w cieczy pod wpływem siły ciężkości:

$$F_G = mg = \frac{4}{3}\pi r^3 d_k g, \tag{25.3}$$

gdzie d_k oznacza gęstość kulki, g – przyspieszenie ziemskie.

Oprócz wymienionych sił istotną rolę odgrywa *wypór hydrostatyczny*, który, zgodnie z *prawem Archimedesa*, wyrażamy wzorem:

$$F_W = \frac{4}{3}\pi r^3 d_c g, \tag{25.4}$$

gdzie d_c – gęstość cieczy.

Uwzględniwszy kierunki działania sił, siłę wypadkową zapiszemy w postaci:

$$F = F_G - F_W - F_T. \tag{25.5}$$

Od momentu puszczenia kulki ($\upsilon_0 = 0$) jej ruch jest przyspieszony, ponieważ siła ciężkości jest większa od sumy sił wyporu i lepkości. Ze wzrostem prędkości rośnie także siła F_T, co prowadzi do zmniejszania się siły wypadkowej F. Tak się

dzieje aż do chwili, gdy wypadkowa siła osiągnie wartość zerową. Od tego momentu ruch kulki staje się jednostajny.

W warunkach doświadczenia prędkość wyznaczamy, mierząc czas t, w jakim kulka przebywa ustaloną drogę l.

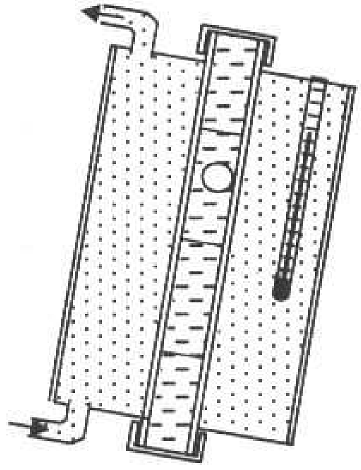
Z równania (25.5) dla zakresu ruchu jednostajnego ($F = 0$) możemy wyznaczyć współczynnik lepkości. Po wyrażeniu odpowiednich sił przez równania (25.2)–(25.4) i dokonaniu przekształceń równania (25.5) otrzymujemy wyrażenie na współczynnik lepkości:

$$\eta = \frac{2(d_k - d_c)gr^2t}{9l}. \tag{25.6}$$

To równanie stanowi podstawę metody wyznaczania współczynnika lepkości, którą opisano poniżej.

Wiskozymetr Höplera

Celem niniejszego ćwiczenia jest znalezienie wartości współczynnika lepkości w zależności od temperatury. Posłużymy się w tym celu odpowiednią aparaturą, mianowicie wiskozymetrem Höplera oraz ultratermostatem. W *wiskozymetrze Höplera*, którego budowę przedstawiono na rys. 25.2, średnica cylindra tylko nieznacznie przekracza średnicę kulki, a sam cylinder jest ustawiony nieco ukośnie, dzięki czemu kulka toczy się po ściance cylindra ruchem jednostajnym.



Rys. 25.2. Wiskozymetr Höplera

Wzór (25.6) stosuje się również w omawianym przypadku, lecz zapiszemy go obecnie w postaci:

$$\eta = K(d_k - d_c)t, \tag{25.7}$$

gdzie K jest stałą przyrządu wyznaczaną doświadczalnie z pomiaru dla cieczy o znanym współczynniku lepkości.

Gęstość kulki i cieczy przyjmujemy na podstawie tablic. Jedyną wielkością, którą należy zmierzyć, jest czas spadania kulki między dwoma poziomami zaznaczonymi na cylindrze. W niektórych typach przyrządów są zaznaczone trzy poziomy, co umożliwia stwierdzenie jednostajności ruchu kulki. Gdy ruch jest jednostajny, czasy pokonywania odcinka górnego i dolnego są równe. Pomiar czasu spadania kulki można powtarzać wielokrotnie – wystarczy każdorazowo obrócić przyrząd o kąt 180°.

Cylinder wiskozymetru jest otoczony płaszczem wodnym o regulowanej temperaturze, której wartość wskazuje zanurzony w wodzie termometr. Obudowa płaszcza wodnego jest połączona elastycznymi przewodami z *ultratermostatem*,

w którym następuje regulacja temperatury wody. Wskutek strat ciepła w przewodach doprowadzających ciecz termostatującą do wiskozymetru jego temperatura różni się od wartości nastawionej na regulatorze ultratermostatu. Pod uwagę bierzemy temperaturę wskazywaną przez termometr wiskozymetru.

Do znalezienia stałej K wykorzystujemy równianie (25.7). Podstawiamy do niego wartość η z tablic dla 20°C oraz t – czas opadania zmierzony dla temperatury 20°C.

Wartość η dla innych wartości temperatury obliczamy bezpośrednio z równania (25.7), podstawiając już znaną stałą K i mierzony czas opadania.

Przebieg ćwiczenia

1. Nastawić temperaturę termostatowania na 20°C.
2. Po ustaleniu temperatury zmierzyć czas opadania kulki.
3. Przyjąwszy z tablic współczynnik lepkości w temperaturze 20°C, obliczyć stałą K, korzystając ze wzoru (25.7).
4. Obliczyć błąd stałej K metodą różniczki logarytmicznej.
5. Mierzyć czas opadania kulki dla temperatury 23–40°C co około 3°C.
6. Obliczyć dla każdej temperatury współczynnik lepkości. Dla każdej temperatury obliczyć błąd η metodą różniczki logarytmicznej.
7. Sporządzić wykres zależności współczynnika lepkości od temperatury i nanieść prostokąty błędów.

Zestaw ćwiczeniowy

Wiskozymetr Höplera, ultratermostat (rozdz. 7), sekundomierz

Pojęcia kluczowe

- Tarcie wewnętrzne w płynie, siła tarcia a gradient prędkości, współczynnik lepkości, jednostki współczynnika lepkości, zależność od temperatury
- Prawo Stokesa, wypór hydrostatyczny, siła wypadkowa działająca na kulkę, warunek ruchu jednostajnego kulki w płynie
- Wiskozymetr Höplera, obliczanie stałej K, obliczanie współczynnika lepkości w dowolnej temperaturze

26. Wyznaczanie siły elektromotorycznej ogniw metodą kompensacji

Wprowadzenie

Źródłami *siły elektromotorycznej* (w skrócie SEM) nazywamy urządzenia mogące wytwarzać różnice potencjałów pomiędzy dwoma punktami. Do źródeł SEM zaliczamy ogniwa, baterie i prądnice. Jeden z zacisków ogniwa jest dodatni, a drugi ujemny, odpowiednio do ich potencjałów elektrycznych. W obwodzie na zewnątrz źródła ładunki dodatnie poruszają się od bieguna dodatniego do ujemnego, na którym osiągają najmniejszą wartość energii potencjalnej. Zachowanie ciągłości prądu wymaga, aby wewnątrz źródła ładunki dodatnie przemieszczały się w kierunku od potencjału ujemnego do potencjału dodatniego. Zatem źródło SEM musi być zdolne do wykonania pracy zwiększającej energię ładunków, które do niego dopływają.

Jeśli przeniesienie ładunku dq jest związane z wykonaniem pracy dW, to SEM źródła prądu ε jest zdefiniowana następująco:

$$\varepsilon = \frac{dW}{dq}. \tag{26.1}$$

Jednostką SEM jest J/C, czyli wolt.

Wszystkie rzeczywiste źródła SEM posiadają *opór wewnętrzny*. Najprostszy obwód zamknięty utworzymy przez dołączenie oporu zewnętrznego do zacisków źródła. Zawiera on następujące elementy połączone szeregowo: siłę elektromotoryczną ε, opór wewnętrzny r i opór zewnętrzny R.

Zgodnie z *II prawem Kirchhoffa,* suma wszystkich spadków potencjału w dowolnym obwodzie zamkniętym jest równa zeru. Po zastosowaniu powyższego prawa do naszego obwodu uzyskamy równanie:

$$\varepsilon - ri - Ri = 0. \tag{26.2}$$

gdzie i jest natężeniem prądu w obwodzie.

Iloczyn iR jest różnicą potencjałów zmierzoną na zaciskach zewnętrznych źródła: $iR = U_z$. Uwzględniwszy powyższe w równaniu (26.2), otrzymamy:

$$U_z = \varepsilon - ri. \tag{26.3}$$

Z ostatniego równania wynika, że różnica potencjałów U_z na zaciskach źródła jest mniejsza od siły elektromotorycznej, jeżeli ze źródła czerpiemy prąd ($i > 0$). Jeżeli źródło jest nieobciążone ($i = 0$), to różnica potencjałów na jego zaciskach równa się sile elektromotorycznej.

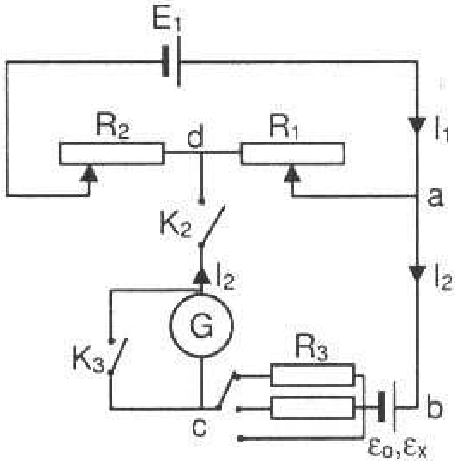
Do pomiaru SEM nie możemy użyć woltomierza, gdyż jego działanie opiera się na przepływie prądu pobieranego z mierzonego źródła. Właściwym sposobem pomiaru SEM jest *metoda kompensacyjna*, w której warunek zerowania się prądu jest spełniony przez skompensowanie SEM badanego źródła zewnętrzną różnicą potencjałów.

Metoda kompensacyjna pomiaru SEM

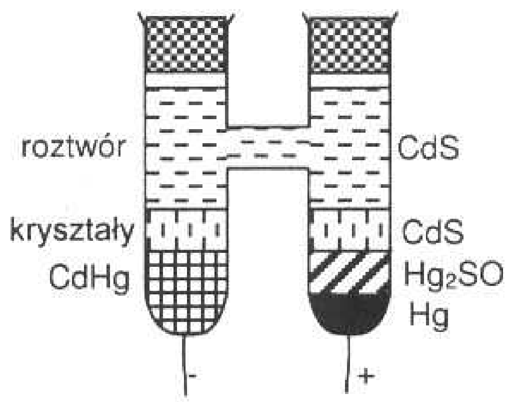
Schemat układu pomiarowego przedstawiono na rys. 26.1. Po zastosowaniu II prawa Kirchhoffa do oczka *abcd* zawierającego ogniwo wzorcowe otrzymujemy równanie:

$$-\varepsilon_0 - R_3 I_2 + (I_1 - I_2)R_1 = 0\,, \tag{26.4}$$

w którym R_3 jest oporem szeregowym zabezpieczającym przed nadmiernym wychyleniem galwanometru G.



Rys. 26.1. Schemat układu kompensacyjnego



Rys. 26.2. Ogniwo Westona

Gdy w wyniku zmian oporów R_1 i R_2 osiągniemy wartość $I_2 = 0$, wówczas równanie (26.4) przyjmie postać:

$$\varepsilon_0 = R_1 I_1\,. \tag{26.5}$$

Jako ogniwa wzorcowego używa się najczęściej *ogniwa Westona*, którego SEM $\varepsilon_0 = 1{,}0183$ V i jest wartością bardzo stabilną. Jest to ogniwo rtęciowo-kadmowe (rys. 26.2), którego elektrodę dodatnią stanowi rtęć metaliczna pokryta pastą z siarczanu rtęciowego Hg_2SO_4, rtęci i nasyconego roztworu siarczanu kadmo-

wego. Biegun ujemny stanowi kadm używany w postaci amalgamatu, pokryty warstwą kryształów siarczanu kadmu.

W drugiej części ćwiczenia zastępujemy ogniwo wzorcowe ogniwem badanym, którego SEM wynosi ε_x. Prąd I_2 wskazywany przez galwanometr wynosi zero przy innych wartościach oporów – $R_{1'}$ i $R_{2'}$. Gdy ponownie zastosujemy II prawo Kirchhoffa, otrzymamy równanie analogiczne do wzoru (26.5):

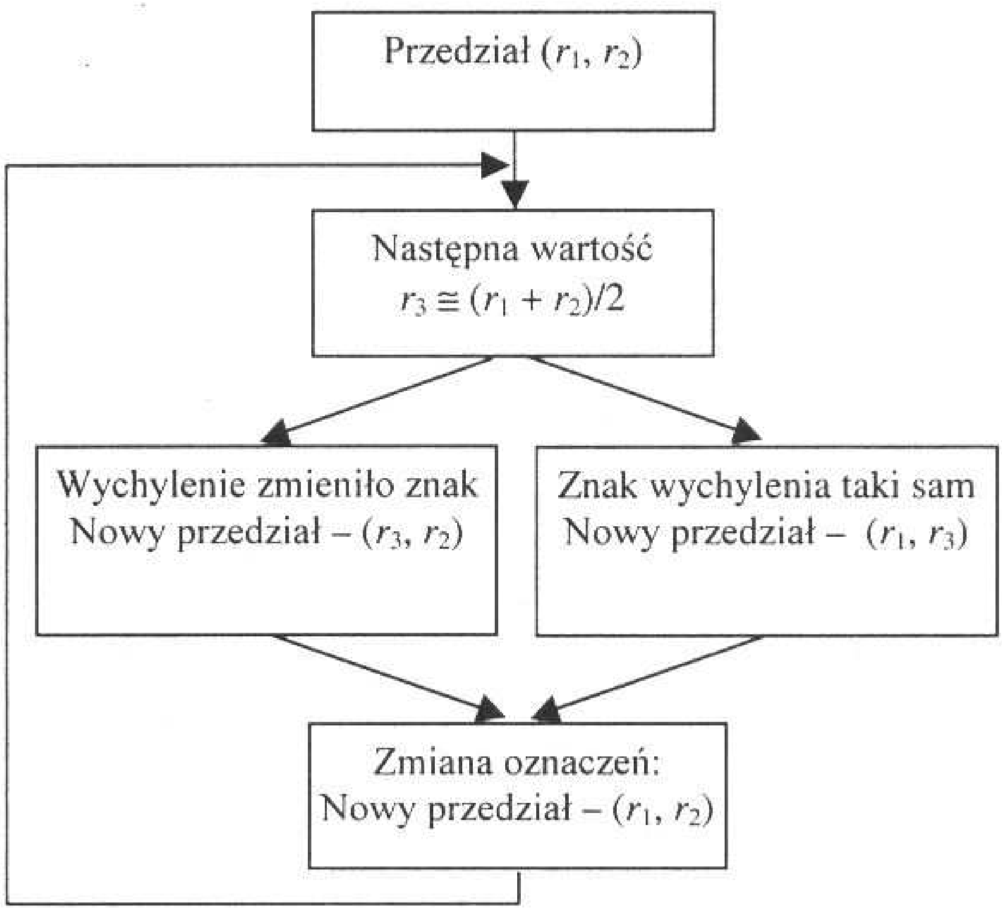
$$\varepsilon_x = R_{1'} I_1 \; . \tag{26.6}$$

Natężenie prądu I_1 jest we wzorach (26.5) i (26.6) takie samo, jeżeli suma oporów $R_1 + R_2$ pozostaje niezmieniona. Przy zachowaniu tego warunku z równań (26.5) i (26.6) wyznaczamy siłę elektromotoryczną ε_x nieznanego ogniwa:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_0 \frac{R_{1'}}{R_1} \; . \tag{26.7}$$

Algorytm kompensowania

Powyżej była rozpatrywana sytuacja, gdy prąd $I_2 = 0$. Oznacza to, że siła elektromotoryczna ogniwa jest skompensowana spadkiem napięcia na oporniku R_1.



Rys. 26.3. Diagram poszukiwania zerowego wychylenia

Zanim ten stan osiągniemy, musimy doprowadzić opory R_1 i R_2 do odpowiednich wartości. Poniżej opisano optymalną drogę dochodzenia do stanu kompensacji. Dla prostoty będziemy mówić tylko o zmianie jednego oporu – R_1, ale nie można zapominać o jednoczesnej zmianie R_2, aby ich suma pozostała stała. Wartość oporu, przy którym wychylenie galwanometru jest zerowe, znajdujemy wykonując kilka kroków.

- Dużymi skokami dochodzimy do sytuacji, kiedy wychylenie zmienia znak. Na przykład, dla sumy oporów 10 kΩ skoki mogą wynosić 1 kΩ. Przyjmijmy, że przed zmianą znaku wartość oporu wynosiła r_1, po zmianie – r_2. W ten sposób wiemy, że przejście przez zero mieści się w przedziale (r_1, r_2). W dalszych krokach będziemy zawężać ten przedział.
- Ustawiamy wartość oporu r_3 w połowie przedziału, tzn. $r_3 \cong (r_1 + r_2)/2$ i badamy wychylenie w celu ustalenia nowego przedziału. Znak $\cong$ oznacza, że r_3 nie musi być ustawiony dokładnie; np. połowa przedziału (2,0, 2,5) może wynosić 2,3.
- Jedną granicą nowego przedziału jest wartość r_3, a drugą jedna z wartości r_1 i r_2 – mianowicie ta, dla której wychylenie ma znak przeciwny niż wychylenie dla r_3. Inaczej mówiąc, nowy przedział wyznaczają najbliższe wartości oporów, przy których wychylenia galwanometru mają przeciwne znaki.
- W celu dalszego zawężenia powtarzamy tę procedurę, przyjmując za punkt wyjścia przedział ustalony w poprzednim kroku.

Liczba powtórzeń zależy od wymaganej dokładności. Opisany algorytm można przedstawić w postaci diagramu (rys. 26.3), a jego przykładowe zastosowanie pokazano w tabeli 26.1.

Tabela 26.1. Poszukiwanie *r* dla zerowego wychylenia

r	1	2	3	2.5	2.3	2.4	2.35	2.32
Wychylenie	50	50	–50	–40	+30	–20	–15	10
Przedział	?	?	(2; 3)	(2; 2,5)	(2,3; 2,5)	(2,3; 2,4)	(2,3; 2,35)	(2,32; 2,35)

Przebieg ćwiczenia

1. Połączyć obwód według rys. 26.1, zwracając uwagę, aby pomocnicze źródło E_1 miało SEM większą zarówno od SEM ogniwa wzorcowego, jak i od ogniwa badanego. Nastawić opornice R_1 i R_2 w taki sposób, aby suma oporów wynosiła 10 000 omów – wartości tej nie zmieniać do końca pomiaru. Klucz K_3 w czasie pomiaru powinien być otwarty – służy on do natychmiastowego zwarcia galwanometru w przypadku przepływu zbyt dużego prądu. Opór zabezpieczający nastawić na wartość maksymalną.
2. Znaleźć opory R_1 i R_2, dla których nastąpi kompensacja SEM ogniwa wzorcowego. Postępować według algorytmu przedstawionego powyżej, wszystkie

próby zapisywać w tabeli podobnej do tabeli 26.1. W celu odczytania wychylenia należy zamknąć klucz K_2.
3. Przeprowadzić kompensację jak w punkcie 2 dla nieznanych ogniw.
4. Dla zmienionych wartości $R_1 + R_2$ (np. 8000 omów i następnie 12 000 omów) powtórzyć czynności wymienione w punktach 2 i 3.
5. Obliczyć siły elektromotoryczne nieznanych ogniw ze wzoru (26.7).
6. Obliczyć wartości średnie dla każdego ogniwa i odchylenia standardowe średnich.
7. Zaokrąglić i zestawić wyniki i błędy.

Zestaw ćwiczeniowy

Źródło pomocnicze (akumulator lub bateria), ogniwo Westona, ogniwa badane, galwanometr, 2 oporniki regulowane (rozdz. 9), przełącznik oporów zabezpieczających, wyłączniki, przewody

Pojęcia kluczowe

- Definicja siły elektromotorycznej, siła elektromotoryczna a różnica potencjałów
- Prawo Ohma, prawo Kirchhoffa, dzielnik napięć (rozdz. 8)
- Woltomierz (rozdz. 11), ogniwo Westona
- Metoda kompensacyjna pomiaru SEM ogniw, algorytm kompensowania

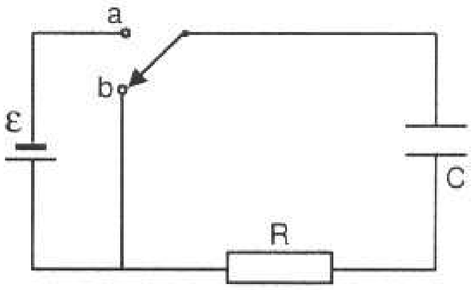
27. Wyznaczanie pojemności kondensatora za pomocą drgań relaksacyjnych

Wprowadzenie

Kondensatorem nazywamy układ dwóch okładek metalowych dowolnego kształtu rozdzielonych dielektrykiem. W stanie naładowania na każdej z okładek znajduje się ładunek elektryczny Q o przeciwnym znaku, a między okładkami panuje różnica potencjałów (napięcie) U. *Pojemnością* kondensatora nazywamy stosunek ładunku do napięcia

$$C = \frac{Q}{U}. \tag{27.1}$$

Pojemność kondensatora zależy od jego geometrii, tzn. od kształtu, rozmiarów i odległości okładek, a także od rodzaju dielektryka znajdującego się między nimi. Pojemność kondensatorów o dostatecznie symetrycznej budowie (np. płaskich, cy-



Rys. 27.1. Obwód RC

lindrycznych, kulistych) jest opisana prostymi wzorami podawanymi w podstawowych podręcznikach fizyki.

Ładowanie kondensatora odbywa się przez dołączenie źródła o sile elektromotorycznej (SEM) ε do obwodu zawierającego szeregowo połączone opór R i pojemność C (na rys. 27.1 pozycja przełącznika *a*), natomiast *rozładowanie* – przez odłączenie źródła od obwodu (pozycja przełącznika *b*).

Przebieg ładowania

W dowolnym momencie ładowania na okładkach znajduje się ładunek q, a w obwodzie płynie prąd i. Zgodnie z II prawem Kirchhoffa spadki potencjału na kondensatorze i na oporniku są kompensowane przez SEM źródła

$$\varepsilon = iR + \frac{q}{C}. \tag{27.2}$$

Po zróżniczkowaniu tego równania i uwzględnieniu związku $i = dq/dt$ otrzymamy

$$\frac{di}{dt} + \frac{1}{RC} i = 0. \tag{27.3}$$

Jest to równanie różniczkowe, w którym zmienne możemy rozdzielić, a następnie obie strony równania scałkować. W wyniku takiego postępowania otrzymamy rozwiązanie w postaci:

$$i = i_0 e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{\varepsilon}{R} e^{-\frac{t}{RC}}, \tag{27.4}$$

gdzie i_0 jest stałą całkowania określoną przez warunki początkowe. W początkowej chwili ładowania ($t = 0$) ładunek na okładkach kondensatora jest równy zeru i z równania (27.2) wynika, że wtedy prąd $i_0 = \varepsilon / R$.

Napięcie na kondensatorze U_c w dowolnej chwili wynosi $\varepsilon - Ri$ i zmienia się w czasie według równania:

$$U_c = \varepsilon (1 - e^{-\frac{t}{RC}}). \tag{27.5}$$

Po dostatecznie długim czasie kondensator zostaje naładowany całkowicie. Matematycznie stwierdzamy, że $U_c \to \varepsilon$, gdy $t \to \infty$. Kondensator uważamy za naładowany po czasie $t = 5RC$.

Przebieg rozładowania

Gdy okładki naładowanego kondensatora połączymy bezpośrednio opornikiem R (przełącznik w położeniu b), wówczas przez opornik popłynie prąd w kierunku przeciwnym niż przy ładowaniu. W tej sytuacji II prawo Kirchhoffa przyjmuje postać:

$$Ri + \frac{q}{C} = 0. \tag{27.6}$$

Po względnieniu znowu, że $i = dq/dt$, otrzymamy równanie różniczkowe

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0. \tag{27.7}$$

Rozwiązaniem tego równania jest funkcja:

$$q = q_0 \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}, \tag{27.8}$$

gdzie q_0 jest początkowym ładunkiem na kondensatorze – jest to ładunek kondensatora naładowanego: $q_0 = C\varepsilon$.

Natężenie prądu podczas rozładowywania znajdujemy, różniczkując równanie (27.8)

$$i = -\frac{\varepsilon}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}. \tag{27.9}$$

Dzieląc równanie (27.8) przez C, znajdujemy napięcie na kondensatorze w dowolnej chwili rozładowywania:

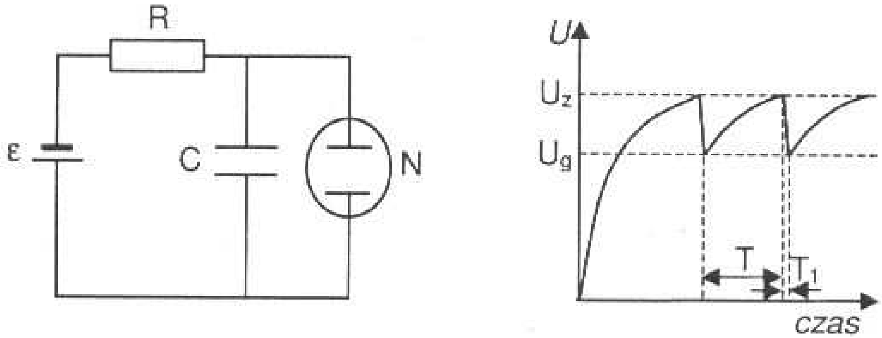
$$U_c = \varepsilon \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}. \tag{27.10}$$

W równaniach opisujących ładowanie i rozładowanie kondensatora występuje wielkość RC mająca wymiar czasu. Wielkość ta nazywa się *stałą czasową* obwodu i określa prędkość zarówno ładowania, jak i rozładowania kondensatora. Po czasie $t = RC$ od chwili rozpoczęcia ładowania lub rozładowania wyrażenie $\exp(-t/(RC))$ wynosi $1/e$ ($e = 2{,}71828$). Z odpowiednich równań podanych powyżej wynika, że prąd ładowania lub rozładowania oraz napięcie przy rozładowywaniu po czasie RC zmniejszają się e-krotnie względem wartości początkowej, podczas ładowania zaś napięcie na kondensatorze po tym czasie osiąga $(1 - 1/e)$ wartości pełnego naładowania.

Drgania relaksacyjne

Jeżeli do obwodu *RC* dołączymy neonówkę równolegle do kondensatora (rys. 27.2), to wystąpią okresowe, niesymetryczne wzrosty i spadki napięcia na kondensatorze nazywane *drganiami relaksacyjnymi*.

Neonówka, zwana inaczej stabiliwoltem, jest to bańka szklana wypełniona gazem, najczęściej neonem, pod ciśnieniem około 20 mm Hg, zawierająca dwie elektrody metalowe o małej pracy wyjścia, np. barowe. Jeżeli do neonówki przyłożymy niewielkie napięcie, prąd przez nią nie płynie ze względu na małe przewodnictwo gazu. Po przekroczeniu wartości U_z (napięcie zapłonu) następuje jonizacja lawinowa gazu, widoczne jest jego świecenie i przez neonówkę płynie prąd. Rozpoczęta jonizacja lawinowa trwa dalej przy nieco niższych napięciach – ustaje, gdy napięcie spada poniżej wartości U_g (napięcie gaśnięcia).



Rys. 27.2. Obwód do wytwarzania drgań relaksacyjnych (po lewej) oraz przebieg napięcia na kondensatorze (po prawej)

Opisane właściwości neonówki wykorzystujemy do uzyskania drgań relaksacyjnych (rys. 27.2). Kondensator *C* ładuje się ze źródła prądu stałego przez opornik *R*. Napięcie na okładkach kondensatora rośnie wykładniczo, zgodnie z równaniem (27.5). Gdy napięcie osiągnie wartość U_z, zapala się neonówka *N*. Ponieważ opór palącej się neonówki jest bardzo mały, następuje szybkie rozładowanie kondensatora (opisane równaniem 27.10) do napięcia U_g. Po zgaśnięciu neonówki rozpoczyna się kolejne ładowanie kondensatora i następnie jego rozładowanie. Opisane procesy powtarzają się cyklicznie.

Pojedynczy okres składa się z dwóch części: czasu narastania napięcia *T*, określonego przez pojemność *C* i opór *R*, oraz czasu T_1, w którym napięcie na kondensatorze zmniejsza się, określonego tą samą pojemnością oraz oporem neonówki. Ze względu na to, że opór jarzącej się neonówki jest znacznie mniejszy niż opór *R*, czas rozładowania stanowi mały ułamek całego okresu i w większości przypadków możemy przyjąć, że okres drgań relaksacyjnych jest równy czasowi ładowania kondensatora od napięcia gaśnięcia U_g do napięcia zapłonu U_z.

W pierwszym cyklu ładowania napięcie U_g zostanie osiągnięte po czasie t_0. Równanie (27.5) dla czasu t_0 przyjmuje postać:

$$U_g = \varepsilon\left(1 - e^{-\frac{t_0}{RC}}\right). \tag{27.11}$$

Analogiczne równanie możemy zapisać dla czasu $t_0 + T$, kiedy napięcie na okładkach kondensatora wynosi U_z:

$$U_g = \varepsilon\left(1 - e^{-\frac{t_0+T}{RC}}\right). \tag{27.12}$$

Z dwóch ostatnich równań otrzymujemy:

$$\begin{aligned} t_0 &= RC\ln(\varepsilon - U_g) - RC\ln\varepsilon, \\ t_0 + T &= RC\ln(\varepsilon - U_z) - RC\ln\varepsilon\,. \end{aligned} \tag{27.13}$$

Po odjęciu powyższych równań stronami znajdujemy okres T:

$$T = RC\ln\frac{\varepsilon - U_z}{\varepsilon - U_g}\,. \tag{27.14}$$

Wyrażenie $\ln[(\varepsilon - U_z)/(\varepsilon - U_g)]$ jest wielkością stałą dla określonego napięcia i określonego typu neonówki. Jeżeli oznaczymy je symbolem K, to równanie (27.14) przyjmie postać:

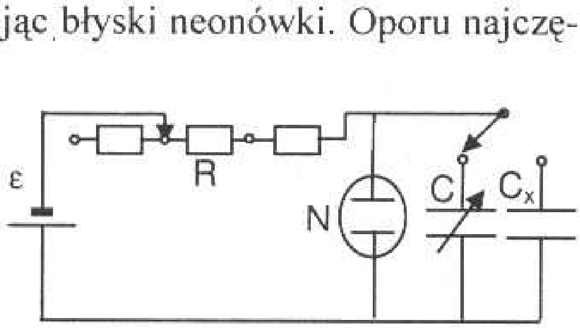
$$T = RCK\,. \tag{27.15}$$

Widzimy, że okres drgań relaksacyjnych jest wprost proporcjonalny do pojemności i oporu.

Zasada pomiaru pojemności

Wzór (27.15) umożliwia wyznaczenie pojemności, jeżeli potrafimy znaleźć okres drgań relaksacyjnych, opór obwodu oraz stałą K. Obwód pomiarowy przedstawiono na rys. 27.3.

Okres mierzymy sekundomierzem, obserwując błyski neonówki. Oporu najczęściej nie mierzymy – posługujemy się opornikami oznaczonymi. W celu wyznaczenia stałej K zamiast badanego kondensatora bierzemy szereg kondensatorów o znanych pojemnościach i mierzymy okresy drgań relaksacyjnych. Po zmierzeniu okresu mamy wszystkie wielkości określające stałą K i obliczamy ją, wykorzystując równanie (27.15).



Rys. 27.3. Układ do wyznaczania pojemności na podstawie drgań relaksacyjnych

Przebieg ćwiczenia

1. Przy pewnym ustalonym oporze zmieniać skokami pojemność wzorcową. Dla każdej wartości mierzyć czas 10–20 błysków i wyznaczyć okres. Wartości oporu i pojemności dobierać tak, aby błyski były łatwe do policzenia.
2. Powtórzyć punkt 1 dla innych wartości oporów. Całkowita liczba kombinacji oporów i pojemności powinna wynosić 20–30.
3. Dla każdej wartości RC obliczyć stałą K, a następnie jej wartość średnią i odchylenie standardowe średniej.
4. Wykonać pomiary okresu dla nieznanych kondensatorów i obliczyć pojemność każdego z nich.
5. Obliczyć błędy każdej pojemności, najłatwiej metodą różniczki logarytmicznej. Za błąd stałej K przyjąć wartość obliczoną w punkcie 3.
6. Zaokrąglić błędy i wyniki.
7. Zestawić wyznaczone wartości i ich błędy.

Zestaw ćwiczeniowy

Zasilacz (bateria) prądu stałego, neonówka, kondensator wzorcowy (dekadowy), kondensatory badane, sekundomierz, przełącznik

Pojęcia kluczowe

- Pojemność elektryczna, kondensatory
- Ładowanie kondensatora: prawo Kirchhoffa, zmiana prądu i napięcia w czasie
- Rozładowanie kondensatora: prawo Kirchhoffa, zmiana prądu i napięcia w czasie, stała czasowa
- Neonówka
- Drgania relaksacyjne: mechanizm, wykres, okres
- Wyznaczanie stałej K, wyznaczanie pojemności

28. Pomiar *e/m* metodą odchyleń w polu magnetycznym

Wprowadzenie

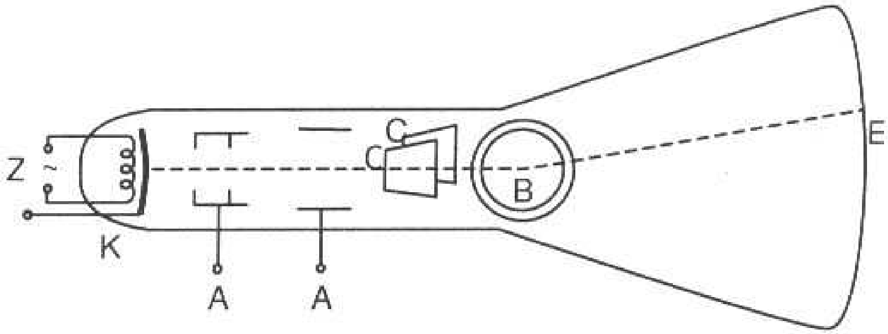
Na posiadającą ładunek elektryczny cząstkę, poruszającą się w polu elektrycznym i magnetycznym, działa siła, zwana *siłą Lorentza*, określona wzorem:

$$\vec{F} = q\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}, \tag{28.1}$$

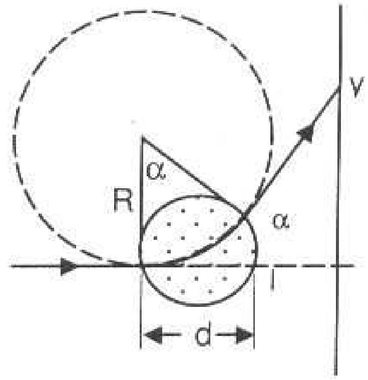
gdzie: q – ładunek cząstki, v – jej prędkość, E – natężenie pola elektrycznego, B – indukcja magnetyczna.

Działanie obu wymienionych pól prowadzi w ogólnym przypadku do zmiany wektora prędkości – w polu elektrycznym może się zmieniać kierunek i wartość prędkości, natomiast w polu magnetycznym wartość prędkości pozostaje stała, a zmienia się kierunek.

Badanie zachowania się cząsteczek naładowanych, jak np. elektronów, protonów, jonów dodatnich, w polach elektrycznym i magnetycznym pozwala wyznaczyć tzw. ładunek właściwy, czyli stosunek q/m.



Rys. 28.1. Budowa lampy oscyloskopowej, Z – żarzenie katody (K), A – anody, B – cewka wytwarzająca pole magnetyczne, C – płytki odchylania elektrostatycznego, E – ekran fluorescencyjny



Rys. 28.2. Odchylenie toru elektronu w polu magnetycznym

W celu określenia naboju właściwego elektronu (e/m) posłużymy się *lampą oscyloskopową* z odchyleniem magnetycznym w kierunku Y. Budowę takiej lampy przedstawiono na rys. 28.1. Elektrony emitowane z podgrzanej katody w wyniku zjawiska *termoemisji* są następnie przyspieszane na skutek różnicy potencjałów U_A panującej między katodą a anodą A. W celu zogniskowania wiązki elektronów anoda ma najczęściej postać kilku cylindrów o odpowiednich potencjałach. Następnie elektrony przechodzą między płytkami BB', które zwykle służą do odchylania poziomego, lecz w naszym ćwiczeniu nie będą wykorzystane. Nieco dalej elektrony wchodzą w obszar pola magnetycznego skierowanego poziomo, prostopadle do kierunku ich ruchu. Zgodnie z wektorowym równaniem (28.1) elektrony zostaną są odchylane w kierunku pionowym (rys. 28.2). Po wyjściu z obszaru pola magnetycznego biegną po linii prostej i w końcu uderzają w ekran fluorescencyjny, wywołując jego świecenie.

Pole magnetyczne jest wytwarzane w wyniku przepływu prądu przez uzwojenie umieszczone na zewnątrz lampy.

Indukcja magnetyczna B jest proporcjonalna do natężenia prądu I:

$$B = cI . \tag{28.2}$$

Współczynnik proporcjonalności c określamy empirycznie.

Znajdźmy wyrażenie pozwalające wyznaczyć stosunek *e/m* z położenia plamki świetlnej na ekranie. Warunek równowagi siły odchylającej w obszarze pola magnetycznego i siły bezwładności wyraża równanie:

$$evB = \frac{mv^2}{R}, \tag{28.3}$$

gdzie R jest promieniem krzywizny toru.

Szukaną wielkość *e/m* na podstawie równania (28.3) możemy przedstawić w postaci:

$$\frac{e}{m} = \frac{v}{BR}. \tag{28.4}$$

Prędkość możemy wyrazić przez napięcie U_a, przyrównując energię kinetyczną do pracy wykonanej przez pole elektryczne na drodze między katodą i anodą:

$$\frac{mv^2}{2} = eU_A. \tag{28.5}$$

Obliczoną z powyższego równania prędkość wstawiamy do równania (28.4), podnosimy obie strony do kwadratu i otrzymujemy:

$$\frac{e}{m} = \frac{2U_A}{B^2R^2}. \tag{28.6}$$

Pozostała do wyeliminowania tylko jedna wielkość – R. Biorąc pod uwagę, że w warunkach doświadczenia $y << l$ oraz $d << R$ (rys. 28.2), możemy napisać:

$$\alpha = \frac{y}{l} = \frac{d}{R}. \tag{28.7}$$

Promień krzywizny R możemy zatem wyrazić w postaci:

$$R = \frac{ld}{y}, \tag{28.8}$$

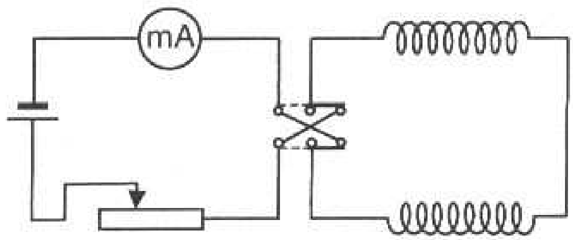
gdzie: l – odległość ekranu lampy oscyloskopowej od środka cewki, d – średnica cewki odchylającej, y – odchylenie plamki na ekranie względem położenia przy $B = 0$.

Po wstawieniu wzorów (28.2) i (28.8) do równania (28.6) otrzymujemy ostateczne wyrażenie, z którego możemy wyliczyć szukany stosunek *e/m* na podstawie prostych pomiarów.

$$\frac{e}{m} = C\frac{y^2}{I^2}, \tag{28.9}$$

gdzie oznaczono $C = 2U_A/(c^2l^2d^2)$.

Przebieg ćwiczenia



Rys. 28.3. Schemat zasilania cewki odchylającej

1. Połączyć obwód elektryczny według schematu przedstawionego na rys. 28.3.
2. Odczytać położenie plamki y'_0 na ekranie przy zerowym prądzie cewki.
3. Odczytać położenie plamki y' na ekranie dla różnych wartości prądu cewki i dla obu kierunków przepływu prądu. Obliczyć odchylenia toru elektronów $y = y' - y'_0$.
4. Dla każdego odchylenia obliczyć stosunek *e/m* na podstawie równania (28.9). Wartość stałej *C* jest podana w instrukcji ćwiczenia.
5. Obliczyć wartość średnią i odchylenie standardowe.
6. Zaokrąglić błąd i wynik oraz przedstawić postać ostateczną.

Zestaw ćwiczeniowy

Oscyloskop, źródło prądu stałego, miliamperomierz (rozdz. 2.7), przełącznik kierunku prądu (rozdz. 2.6)

Pojęcia kluczowe

- Ładunek i masa elektronu, ładunek w polu elektrycznym i magnetycznym, siła Lorentza
- Lampa oscyloskopowa, prędkość ładunku uzyskana w polu elektrycznym
- Pole magnetyczne zwojnicy, tor ładunku w polu magnetycznym i równowaga sił
- Obliczanie *e/m*, wielkości do pomiaru.

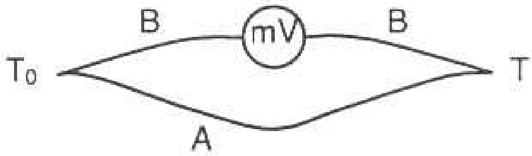
29. Cechowanie termoogniwa

Wprowadzenie

Termoogniwo stanowią dwa różne przewodniki połączone ze sobą w sposób przedstawiony na rys. 29.1. Jeżeli punkty łączenia przewodników mają różną temperaturę, to powstaje między nimi różnica potencjałów zwana *siłą termoelektryczną*. Jej wartość zależy od rodzaju przewodników tworzących termoogniwo oraz od różnicy temperatury i wyraża ją wzór:

$$\varepsilon = \alpha_1 (T - T_0) + \alpha_2 (T - T_0)^2, \qquad (29.1)$$

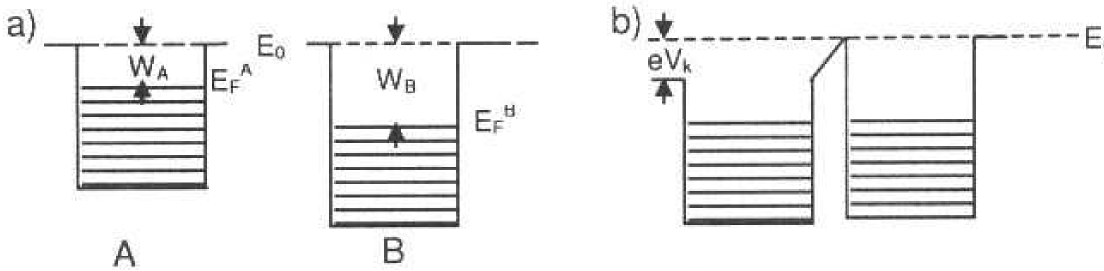
przy czym α_1 i α_2 są to współczynniki termoelektryczne, które charakteryzują zastosowane materiały. Przedstawiony efekt nazywamy *zjawiskiem Seebecka.*



Rys. 29.1. Termoogniwo, czyli termopara

Bezpośrednią przyczyną powstania siły termoelektrycznej jest różna wartość napięć kontaktowych w złączach o różnej temperaturze. Istnienie *napięć kontaktowych* i ich zależność od temperatury zrozumiemy, rozważając zjawiska elektronowe w metalach.

Na rysunku 29.2 przedstawiono obsadzone poziomy elektronowe w dwóch różnych przewodnikach – A i B. Ich poziomy Fermiego E_F leżą w różnych odległościach od poziomu próżni E_0, więc *prace wyjścia* W_A i W_B są także różne. W każdej temperaturze istnieje pewna liczba elektronów, które mają energię kinetyczną wystarczającą do wykonania pracy wyjścia W, czyli do wyjścia poza powierzchnię metalu. Te elektrony tworzą tzw. *prąd termoemisji* skierowany prostopadle do powierzchni



Rys. 29.2. Pasma energetyczne dwóch przewodników oddzielnych (a) oraz ściśle połączonych (b)

metalu. Gęstość prądu termoemisji jest określona *prawem Richardsona -Dushmana* i dla obu przewodników wynosi odpowiednio:

$$j_A = AT^2 e^{-\frac{W_A}{kT}}, \tag{29.2a}$$

$$j_B = AT^2 e^{-\frac{W_B}{kT}}. \tag{29.2b}$$

Gdy oba przewodniki zbliżymy na bardzo małą odległość, elektrony opuszczające metal A będą przechodziły do metalu B i odwrotnie. W sytuacji przedstawionej na rys. 29.2, $j_A > j_B$ ze względu na wartości prac wyjścia ($W_A < W_B$). Przewaga prądu j_A prowadzi do zwiększenia liczby elektronów w metalu B i do powstania ich niedomiaru w metalu A.

W tej sytuacji metale naładują się przeciwnymi znakami i powstanie między nimi różnica potencjałów o takim kierunku, że dalszy przepływ elektronów od A do B będzie utrudniony i w końcu zostanie zrównoważony przepływem od B do A.

W stanie równowagi, przedstawionym na rys. 29.2b, strumienie elektronów w obu kierunkach są takie same, co oznacza, że wykładniki potęgowe w równaniach (29.2a) i (29.2b) są równe, czyli

$$W_A + eV_k = W_B\,. \tag{29.3}$$

Powyższe równanie odzwierciedla fakt, że elektrony opuszczające metal A muszą wykonać, oprócz pracy wyjścia, pracę przeciwko różnicy potencjałów V_k. Tę różnicę potencjałów, powstającą w wyniku zetknięcia się dwóch przewodników, nazywamy *napięciem kontaktowym*. Jego wartość jest określona tylko przez różnicę prac wyjścia obu metali.

$$V_k = \frac{W_B - W_A}{e}, \tag{29.4}$$

gdzie e oznacza ładunek elektronu.

Gdy oba złącza obwodu z rys. 29.1 mają tę samą temperaturę, wówczas ich napięcia kontaktowe się kompensują i napięcie wypadkowe jest równe zeru. Podobnie, w dowolnym obwodzie zamkniętym złożonym z większej liczby przewodników suma napięć kontaktowych jest równa zeru.

Napięcie kontaktowe zmienia się wraz z temperaturą. Wynika to z zależności energii Fermiego od temperatury. Zależność tę opisuje równanie:

$$E_F = E_{F0}\left[1 - \frac{\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{E_{F0}}\right)^2\right], \tag{29.5}$$

gdzie E_{F0} jest energią Fermiego w temperaturze 0 K.

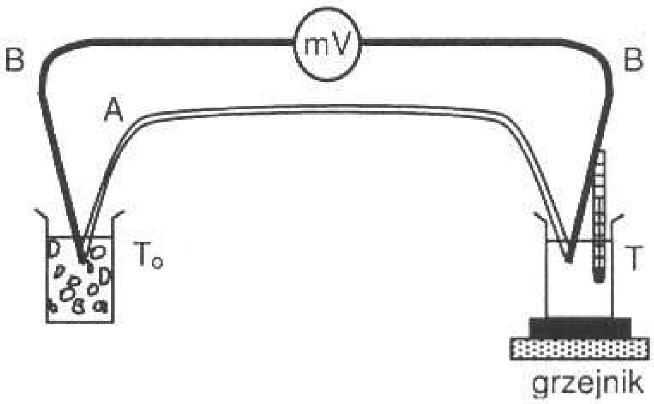
Przy zmianie temperatury danego kontaktu zmiany energii Fermiego pociągają za sobą zmiany prac wyjścia obu metali o różną wartość, co prowadzi do zmiany napięcia kontaktowego. Zatem tylko przy różnicy temperatury złączy w obwodzie wystąpi wypadkowe napięcie zwane siłą termoelektryczną.

Siła termoelektryczna może powstać również w przewodniku jednorodnym (bez złączy), gdy między jego końcami wytworzymy różnicę temperatury. To zjawisko nosi nazwę *efektu Thomsona* i jest prostą konsekwencją zależności energii Fermiego od temperatury.

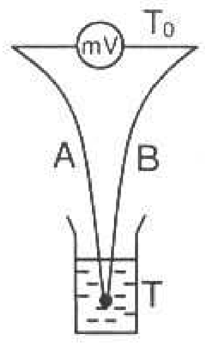
Jeśli do obwodu zawierającego złącza różnych przewodników przyłożymy napięcie zewnętrzne, to popłynie prąd elektryczny. Gdy na drodze prądu wystąpi złącze, na którym potencjał kontaktowy zmniejsza się w kierunku przepływu prądu, to na złączu wydziela się ciepło, zgodnie z prawem Joule'a-Lenza $Q = i\,V_k\,t$. Gdy kierunek spadku potencjału kontaktowego jest przeciwny do kierunku prądu, występuje oziębianie złącza. Pobieranie lub wydzielanie ciepła podczas przepływu prądu przez złącza metali nazywamy *zjawiskiem Peltiera*.

Zjawiska termoelektryczne są obecnie często wykorzystywane zarówno do pomiaru temperatury w bardzo szerokim zakresie, jak i do wykrywania bardzo sła-

bego ogrzania. Do pomiaru niezbyt niskiej temperatury używa się termoogniw zwanych również *termoparami* lub *termoelementami*. Termoogniwa pomiarowe są zbudowane z przewodników o znanym, uprzednio dobrze zmierzonym napięciu termoelektrycznym. W miejscu kontaktu przewodniki, najczęściej w postaci drutu, są spawane lub lutowane. Jeden z kontaktów (rys. 29.3) umieszcza się w ośrodku o określonej temperaturze T_0, np. w mieszaninie wody z lodem, a drugi w miejscu, którego temperaturę T chcemy zmierzyć. Powstające w obwodzie napięcie mierzymy miliwoltomierzem. Na podstawie zmierzonego napięcia wyznaczamy różnicę $T - T_0$ i następnie samą temperaturę T.



Rys. 29.3. Układ do cechowania termoogniwa; *A*, *B* – różne przewodniki



Rys. 29.4. Termopara techniczna; *A*, *B* – różne przewodniki

Do pomiaru temperatury od –200°C do +350°C stosujemy termopary miedź–konstantan, w zakresie 0÷1000°C żelazo–konstantan, a do pomiaru temperatury wysokiej, panującej w piecach laboratoryjnych i przemysłowych (do 1700°C), służą termopary, w których jeden przewód jest zrobiony z czystej platyny, drugi zaś ze stopu 90% platyny i 10% rodu.

W *zastosowaniach technicznych* korzysta się z uproszczonej wersji termopary, przedstawionej na rys. 29.4. Jedno złącze jest umieszczone w badanym ośrodku, a w miejsce drugiego włącza się miernik napięcia. Wskazania miernika odpowiadają różnicy temperatury między ośrodkiem a otoczeniem.

W porównaniu z termometrami cieczowymi termoogniwa mają następujące zalety:

- mają bardzo małą pojemność cieplną; mogą być wykonane nawet z najcieńszych drutów, dzięki czemu nadają się do pomiarów temperatury mikroobiektów;
- miejsca pomiarowe mogą się znajdować w dużych odległościach od wskaźnika;
- mają bardzo duży zakres mierzonej temperatury –250÷2000°C.

Wzorcowanie termoogniwa

W celu znalezienia napięć termoelektrycznych odpowiadających określonym różnicom temperatury $T - T_0$ stosujemy układ przedstawiony na rys. 29.3 lub jego

odmiany. Jedno złącze znajduje się w naczyniu zawierającym mieszaninę wody z lodem ($T_0 = 0°C$), drugie zaś w środowisku, którego temperaturę możemy regulować. Może to być naczynie z wodą, której temperaturę zmieniamy za pomocą grzejnika, jak również specjalny grzejnik elektryczny otaczający złącze termopary. W każdym przypadku temperatura jest mierzona termometrem. Ze względu na bezwładność termometru przyrost temperatury nie może być zbyt szybki. Regulowany przyrost temperatury można osiągnąć, stosując autotransformator lub zasilacz regulujący napięcie grzejnika. Po każdej zmianie napięcia należy odczekać do czasu, kiedy odczyt temperatury się ustabilizuje.

Po znalezieniu napięć termoelektrycznych dla różnych wartości temperatury sporządzamy wykres. Jeżeli stanowi on linię prostą, to współczynnik α_2 w równaniu (29.1) jest równy zeru, a współczynnik α_1 jest współczynnikiem nachylenia prostej.

Przebieg ćwiczenia

1. Zestawić układ pomiarowy według rys. 29.3.
2. Przez zwarcie zacisków miliwoltomierza znaleźć wskazanie zerowe.
3. Podgrzewając stopniowo złącze termopary, mierzyć temperaturę co około 5°C i odpowiadające jej napięcia termoelektryczne.
4. Podobne pomiary wykonać w czasie stygnięcia.
5. Wykreślić zależność napięcia termoelektrycznego od temperatury.
6. Jeżeli punkty wykresu układają się wokół linii prostej, znaleźć współczynnik termoelektryczny α_1, stosując regresję liniową. Jeżeli wykres jest wyraźnie nieliniowy, wyznaczyć współczynnik osobno dla początku i końca zakresu. W tym celu dwukrotnie zastosować regresję liniową tylko dla kilku punktów pomiarowych, odpowiednio początkowych i końcowych.
7. Znaleźć błędy współczynnika nachylenia.
8. Zaokrąglić wyniki i błędy oraz zrobić zestawienie końcowe.

Zestaw ćwiczeniowy

Termopary, miliwoltomierz , termometr, grzejnik, naczynia, lód

Pojęcia kluczowe

- Termoogniwo, zjawisko Seebecka
- Poziomy energetyczne w metalach, poziom Fermiego, praca wyjścia
- Termoemisja, prawo Richardsona-Dushmana
- Napięcie kontaktowe, siła termoelektryczna
- Zjawisko Thomsona, zjawisko Peltiera
- Budowa termopar, pomiar temperatury, zalety termopar

30. Pomiar przesunięcia fazowego w obwodzie prądu zmiennego

Wprowadzenie

Prądem zmiennym nazywamy prąd o zmieniającym się w czasie natężeniu. Gdy okresowo zmienia się również kierunek prądu, prąd nazywamy *przemiennym*. W praktyce najczęściej stosuje się prąd o natężeniu i napięciu zmieniającym się sinusoidalnie.

$$I = I_0 \sin(\omega t + \varphi_1)\,, \tag{30.1}$$

$$U = U_0 \sin(\omega t + \varphi_2)\,. \tag{30.2}$$

Wielkości I oraz U nazywamy, odpowiednio, natężeniem i napięciem chwilowym, natomiast I_0, U_0 – odpowiednio, natężeniem i napięciem maksymalnym; φ jest fazą początkową, a ω – częstotliwością kołową lub pulsacją. Ta ostatnia wielkość jest zdefiniowana następującym związkiem:

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}\,, \tag{30.3}$$

gdzie: ν – częstotliwość, T – okres.

Jeśli obwód prądu zmiennego zawiera, oprócz oporu omowego, indukcyjność lub pojemność, to przebiegi napięcia i natężenia różnią się fazą. W szczególności oznacza to, że maksymalne wartości napięcia i natężenia są przesunięte względem siebie w czasie. Przyczyną opóźnienia prądu względem napięcia jest zjawisko samoindukcji, a wyprzedzenie napięcia przez prąd jest wynikiem ładowania kondensatora.

Faza początkowa zależy od wyboru punktu początkowego na osi czasu. Wybierzmy ten punkt w taki sposób, aby $\varphi_2 = 0$. Wówczas napięcie w chwili początkowej ($t = 0$) ma wartość zerową, a faza początkowa prądu jest różnicą faz prądu i napięcia, czyli przesunięciem fazowym prądu względem napięcia. Wielkość tę oznaczymy przez φ.

W ogólnym przypadku, gdy obwód składa się z oporu omowego, pojemności i indukcyjności, *przesunięcie fazowe* wyraża się wzorem:

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R}\,, \tag{30.4}$$

gdzie: R – opór, L – indukcyjność, C – pojemność.

Metoda pomiarowa

Przesunięcie fazowe między napięciem a natężeniem prądu możemy zbadać za pomocą oscylografu, przykładając na płytki odchylenia pionowego przebieg napięcia, a na płytki odchylania poziomego X – przebieg prądu.

Ruch plamki świetlnej na ekranie oscyloskopu jest wynikiem nałożenia się dwóch prostopadłych ruchów harmonicznych o tej samej częstotliwości i różnicy faz φ. Ruch wypadkowy jest w ogólności ruchem po krzywej zwanej *figurą Lissajous*, której kształt zależy od stosunku częstotliwości, amplitud, a także od różnicy faz obu drgań składowych. Zasadę konstrukcji figury Lissajous i kilka przykładów podano na rys. 22.3.

W naszym ćwiczeniu częstotliwość obu drgań jest taka sama; amplitudy możemy także zrównać, dobierając odpowiednio wzmocnienia, więc jedynym parametrem określającym kształt figury Lissajous jest różnica faz φ.

Oznaczmy wychylenie chwilowe w kierunku pionowym przez y, w kierunku poziomym przez x i wychylenie maksymalne przez a. Wówczas zmiany czasowe obu wychyleń opisują równania:

$$x = a\sin(\omega t + \varphi)\,, \tag{30.5}$$

$$y = a\sin\omega t\,. \tag{30.6}$$

Kształt figury Lissajous można łatwo znaleźć analitycznie w szczególnych przypadkach.

- Gdy różnica faz wynosi zero, wówczas powyższy układ równań można przekształcić do postaci

$$y = x\,. \tag{30.7}$$

  Otrzymane równanie przedstawia prostą nachyloną pod kątem 45° do osi.

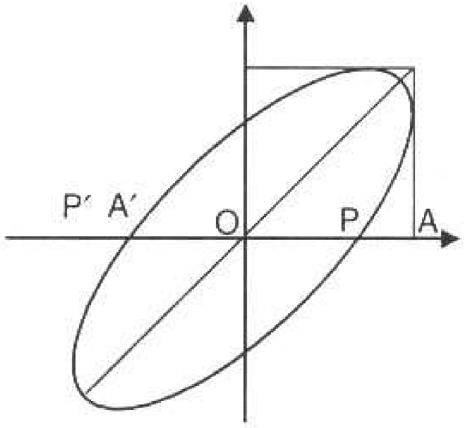
- Gdy różnica faz wynosi 90°, wówczas, po wyeliminowaniu czasu z układu równań (30.5) i (30.6), otrzymamy równanie okręgu:

$$x^2 + y^2 = a^2\,. \tag{30.8}$$

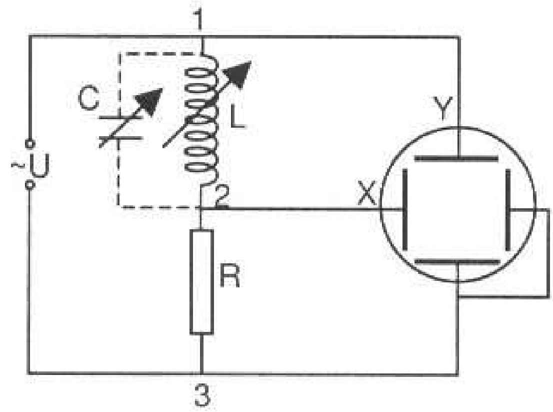
W pozostałych przypadkach figura Lissajous jest elipsą, której spłaszczenie zależy od różnicy faz. Punkty, w których elipsa przecina oś x (rys. 30.1), mają rzędną $y = 0$, a więc $\omega t = 0$. Wynika stąd, że odcięta punktu przecięcia $OP = a\sin\varphi$. Amplituda drgań jest długością odcinka OA. Po zmierzeniu odcinków OP oraz OA znajdujemy sinus przesunięcia fazowego:

$$\sin\varphi = \frac{OP}{OA}\,. \tag{30.9}$$

W celu praktycznego wyznaczenia przesunięcia fazowego tworzymy obwód elektryczny przedstawiony na rys. 30.2. Prąd zmienny ze źródła niskonapięciowego płynie przez szeregowo połączone cewkę indukcyjną L i opór omowy R.



Rys. 30.1. Figura Lissajous dla różnicy faz różnej od zera i 90° oraz dla równych okresów



Rys. 30.2. Schemat obwodu do obserwacji figur Lissajous dla prądu i napięcia

Zamiast cewki możemy przyłączyć kondensator C. Całkowite napięcie panujące między punktami 1 i 3 jest podawane na płytki Y oscyloskopu. Napięcie między punktami 2 i 3 jest proporcjonalne do natężenia prądu ($I = U/R$) i ma taką samą fazę jak prąd, gdyż opór omowy nie wprowadza żadnych przesunięć fazowych. Zatem napięcie U_{23} podawane na płytki X jest miarą prądu płynącego w obwodzie. Na ekranie powstaje figura Lissajous będąca wynikiem nałożenia drgań prądu i napięcia.

Przebieg ćwiczenia

1. Połączyć obwód według rys. 30.2.
2. Ustawić indukcyjność $L = 0$.
3. Rozłączyć przewód łączący płytkę X z punktem 2 – na ekranie zostanie tylko drganie pionowe. Za pomocą pokrętła wzmacniacza Y uregulować jego wielkość na około 2/3 wysokości ekranu.
4. Ponownie połączyć punkty X i 2, a rozłączyć Y i 3 – na ekranie pozostanie tylko drganie poziome. Za pomocą pokrętła wzmacniacza X uregulować jego wielkość na około 2/3 szerokości ekranu.
5. Przy załączonych obu płytkach odchylających na ekranie powinna być linia prosta nachylona pod kątem 45°.
6. Pokrętłem indukcyjności zwiększyć wartość L aż do pojawienia się wyraźnej elipsy. Zmierzyć odcinki OP i OA oraz ich błędy.
7. Obliczyć przesunięcie fazowe ze wzoru (30.9) przekształconego do postaci:

$$\varphi = \arcsin\frac{OP}{OA}. \tag{30.10}$$

8. Powtórzyć pomiary przesunięcia fazowego dla różnych wartości L.
9. Zamiast indukcyjności między punkty 1 i 2 włączyć pojemność C.
10. Powtórzyć pomiary przesunięcia fazowego dla różnych wartości C.
11. Wykreślić zależność $\varphi = f(L)$ oraz $\varphi = f(C)$.
12. Obliczyć błąd, stosując metodę różniczki zupełnej do równania (30.10). Wynik obliczeń jest wyrażony w radianach.
13. Nanieść na wykres prostokąty błędów, przynajmniej dla kilku punktów.

Zestaw ćwiczeniowy

Oscyloskop (rozdz. 28), zasilacz anodowy, opornik suwakowy (rozdz. 9), indukcyjność dekadowa, kondensator dekadowy

Pojęcia kluczowe

- Prąd przemienny, równanie prądu i napięcia, częstotliwość, okres, częstotliwość kołowa
- Faza ruchu drgającego (rozdz. 22)
- Składanie ruchów harmonicznych (rozdz. 22), figury Lissajous (rozdz. 22)
- Wyznaczanie przesunięcia fazowego na podstawie kształtu figury Lissajous

31. Wyznaczanie składowej poziomej natężenia ziemskiego pola magnetycznego za pomocą busoli stycznych

Wprowadzenie

Na powierzchni Ziemi istnieje *pole magnetyczne*, którego rozkład jest określony w głównej mierze położeniem biegunów magnetycznych. *Północny biegun* magnetyczny leży na północ od Kanady, w przybliżeniu na szerokości 71° i długości zachodniej 96°, a biegun *południowy* znajduje się na Antarktydzie, na szerokości 72° i długości wschodniej 155°. Jak widać, bieguny magnetyczne różnią się wyraźnie położeniem od biegunów geograficznych. Linie pola magnetycznego nie są równoległe do południków geograficznych. Nie są one także równoległe do powierzchni Ziemi.

Do opisu pola magnetycznego Ziemi są potrzebne trzy zasadnicze jego elementy: deklinacja, inklinacja oraz wartość składowej poziomej natężenia pola ziemskiego.

Deklinacją nazywamy kąt między składową poziomą indukcji magnetycznej pola ziemskiego a kierunkiem południka geograficznego w danym punkcie.

Inklinacją nazywamy kąt, jaki tworzy z poziomem zawieszona swobodnie w środku masy igła magnetyczna.

Igłą magnetyczną może być każde ciało ferromagnetyczne zawieszone lub podparte na osi pionowej. Zwykle igła magnetyczna ma kształt podłużnej blaszki z ostrymi końcami.

Namagnesowana igła ma makroskopowy moment magnetyczny, który oznaczymy przez μ . Jeżeli znajdzie się ona w zewnętrznym polu magnetycznym o indukcji B, to działa na nią moment siły M określony równaniem wektorowym:

$$\vec{M} = \vec{\mu} \times \vec{B} . \tag{31.1}$$

Moment ten powoduje obrót igły do położenia, w którym jest ona równoległa do wektora indukcji magnetycznej. Tak więc w położeniu równowagi kierunek igły magnetycznej pokrywa się z kierunkiem pola magnetycznego.

Zasada pomiaru

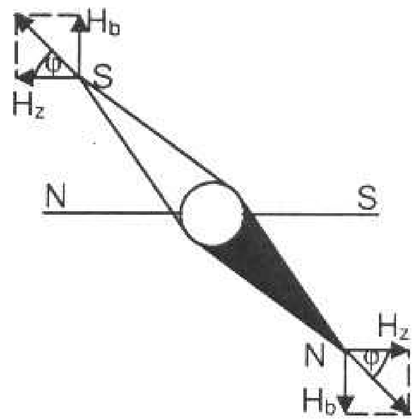
Przyrządem umożliwiającym wyznaczenie składowej poziomej natężenia pola magnetycznego Ziemi jest *busola stycznych*. Składa się ona z szeregu n kolistych uzwojeń o promieniu r, przez które płynie prąd o natężeniu I, oraz umieszczonej w środku igły magnetycznej mogącej poruszać się tylko w płaszczyźnie poziomej. Na igłę działa więc tylko składowa pozioma pola ziemskiego H_z. Busolę ustawiamy najpierw tak, aby kierunek pola magnetycznego Ziemi leżał w płaszczyźnie zwojów, gdy przez busolę nie płynie prąd (płaszczyzna zwojów jest pionowa).

Jeżeli teraz przez uzwojenie popłynie prąd o natężeniu I, wytworzy on w środku busoli pole magnetyczne o natężeniu

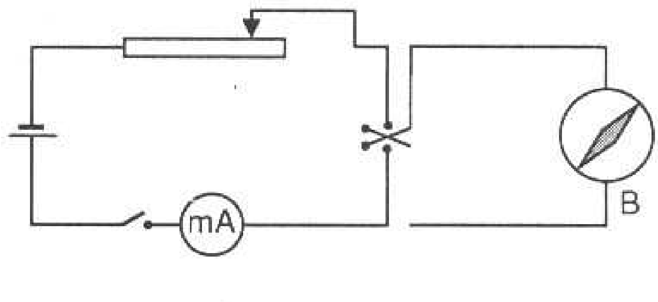
$$H_b = \frac{nI}{2r} \tag{31.2}$$

prostopadłe do płaszczyzny uzwojeń. Igła ustawi się w kierunku wypadkowego pola magnetycznego – odchyla się o kąt φ od położenia pierwotnego. Z rysunku 31.1 widzimy, że

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{H_b}{H_z} = \frac{nI}{2rH_z} . \tag{31.3}$$



Rys. 31.1. Oddziaływanie pola ziemskiego i pola uzwojenia z igłą magnetyczną busoli stycznych



Rys. 31.2. Schemat zasilania busoli stycznych

Z ostatniego równania możemy wyliczyć H_z:

$$H_z = \frac{nI}{2r}\operatorname{ctg}\varphi . \tag{31.4}$$

W celu wyznaczenia *składowej poziomej* natężenia pola magnetycznego Ziemi na podstawie równania (31.4) należy zmierzyć kąty wychylenia igły przy różnych natężeniach prądu oraz znać liczbę i promień zwojów. Obwód elektryczny przedstawiony na rys. 31.2 pozwala na dobór wartości prądu za pomocą opornika regulowanego R, a także na zmianę kierunku prądu za pomocą przełącznika P. Elementy układu, oprócz busoli, mogą być we wspólnej obudowie. Niektóre uzwojenia busoli mają odczepy zakończone gniazdkami. Dołączając obwód zasilający do różnych odczepów, możemy zmieniać liczbę zwojów wytwarzających pole magnetyczne H_b.

Przebieg ćwiczenia

1. Połączyć układ według schematu przedstawionego na rys. 31.2.
2. Przy zerowym prądzie busoli ustawić igłę magnetyczną w płaszczyźnie uzwojeń. Uwaga: Właściwą igłą magnetyczną jest igła krótka – prostopadła do niej igła aluminiowa pełni jedynie funkcję wskaźnika odczytów.

3. Zwiększając kolejno liczbę uzwojeń busoli, odczytywać kąt odchylenia igły dla kilku wartości natężenia prądu. Po każdym odczycie zmieniać kierunek przepływu prądu.
4. Dla każdego pomiaru obliczyć Hz na podstawie równania (31.4).
5. Obliczyć wartość średnią składowej poziomej natężenia ziemskiego pola magnetycznego oraz odchylenie standardowe.
6. Podać wynik i błąd w postaci zaokrąglonej.

Zestaw ćwiczeniowy

Busola stycznych, źródło prądu stałego, opornik regulowany (rozdz. 9), miliamperomierz, przełącznik kierunku prądu (rozdz. 10)

Pojęcia kluczowe

- Indukcja magnetyczna, jednostka indukcji, natężenie pola magnetycznego, jednostki natężenia
- Pole magnetyczne Ziemi, deklinacja, inklinacja
- Pole magnetyczne przewodnika prostoliniowego i kołowego, prawo Ampère'a, prawo Biota-Savarta
- Busola stycznych, kierunek pola wypadkowego
- Moment magnetyczny, siła działająca na moment magnetyczny w polu magnetycznym

32. Wyznaczanie pętli histerezy ferromagnetyku za pomocą halotronu

Wprowadzenie

W pięciu pierwiastkach (Fe, Co, Ni, Gd i Dy) oraz w wielu związkach i stopach tych, a także innych pierwiastków występuje szczególny efekt pozwalający uzyskać duży stopień magnetycznego uporządkowania. W tych metalach i związkach, zwanych *ferromagnetykami*, występuje specjalna postać oddziaływania, zwana *oddziaływaniem wymiennym*, które sprzęga z sobą momenty magnetyczne atomów w sposób sztywno-równoległy. Zjawisko to występuje tylko poniżej pewnej krytycznej temperatury, tzw. *temperatury Curie*. Powyżej temperatury Curie sprzężenie wymienne znika i ciało staje się *paramagnetykiem*.

Obecność ferromagnetyku bardzo silnie wpływa na parametry pola magnetycznego. Rozważmy ferromagnetyk w kształcie pierścienia z nawiniętą nań cewką

toroidalną. Kiedy przez cewkę niezawierającą rdzenia ferromagnetycznego płynie prąd o natężeniu i_m, wewnątrz niej powstaje pole magnetyczne o indukcji B_0:

$$B_0 = \mu_0 n i_m . \tag{32.1}$$

W powyższym wzorze n oznacza liczbę zwojów przypadających na jednostkę długości toroidu, μ_0 – przenikalność magnetyczną próżni ($\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m).

Po wprowadzeniu do toroidu rdzenia indukcja osiąga wartość B, która jest wielokrotnie większa od B_0. Powodem wzrostu indukcji jest porządkowanie się elementarnych dipoli atomowych w rdzeniu i wytwarzanie własnego pola magnetycznego, które dodaje się do pola zewnętrznego. Wobec powyższego *całkowitą indukcję* możemy wyrazić w postaci:

$$B = B_0 + B_M , \tag{32.2}$$

gdzie B_M oznacza indukcję magnetyczną pochodzącą od rdzenia. Indukcję B we wnętrzu ferromagnetyku można również wyrazić następująco:

$$B = \mu \mu_0 n i_m , \tag{32.3}$$

przy czym μ jest bezwymiarową wielkością, zwaną *przenikalnością magnetyczną* ośrodka, określającą, ile razy B jest większe od B_0.

Zależność indukcji B od prądu magnesującego nie jest liniowa, ponieważ w przypadku ferromagnetyków μ silnie zależy od natężenia pola magnetycznego H. Pole magnetyczne jest proporcjonalne do natężenia prądu magnesującego:

$$H = n i_m . \tag{32.4}$$

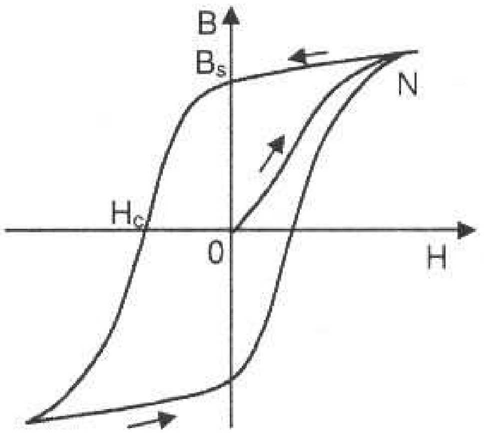
Wspomniane wcześniej uporządkowanie momentów magnetycznych nie odnosi się do całego materiału, lecz do pewnych obszarów zwanych *domenami*. W obrębie domeny ferromagnetycznej dipole magnetyczne są ustawione względem siebie równolegle, niezależnie od warunków zewnętrznych, natomiast kierunki uporządkowania w różnych domenach są różne. W stanie nienamagnesowanym domeny są ustawione całkowicie przypadkowo (z zachowanym uporządkowaniem wewnątrz domen), a magnesowanie polega na ustawieniu się coraz większej liczby domen w kierunku pola zewnętrznego.

Dla małych i średnich wartości pola magnetycznego indukcja wzrasta na skutek zmian wielkości domen i następnie ich obrotu – w równaniu (32.2) wyrazem decydującym o przyroście B jest B_M.

Po osiągnięciu nasycenia (uporządkowania wszystkich dipoli) w silnym polu wartość B_M się ustala, natomiast B_0 cały czas wzrasta liniowo.

Przedstawiony tutaj mechanizm opisuje magnesowanie próbki, która w stanie początkowym była zupełnie rozmagnesowana. Obrazem graficznym tego procesu jest tzw. *krzywa pierwotnego magnesowania* na wykresie $B = f(H)$ (odcinek 0–N na rys. 32.1).

Po osiągnięciu maksymalnego uporządkowania również między domenami pojawiają się siły sprzęgające, co prowadzi do zachowania uporządkowania nawet po odjęciu pola zewnętrznego. Wartość namagnesowania przy zerowym polu ze-



Rys. 32.1. Pętla histerezy ferromagnetyku; H – natężenie pola magnetycznego, B – indukcja magnetyczna w materiale, B_s – pozostałość magnetyczna, H_c – pole koercji, N – nasycenie

wnętrznym (ale po uprzednio osiągniętym nasyceniu) nazywamy *pozostałością magnetyczną* lub *namagnesowaniem spontanicznym.*

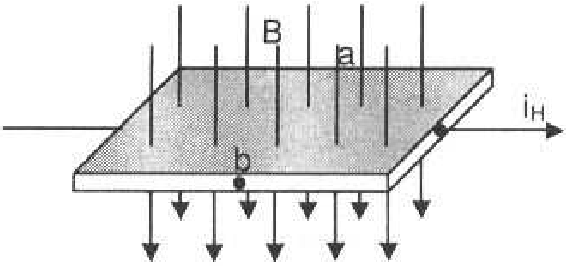
Aby zlikwidować to namagnesowanie, musimy przyłożyć pole zewnętrzne o przeciwnym kierunku i o odpowiedniej wartości zwanej *polem koercji.* W tym momencie namagnesowanie jest równe zeru. Dalszy wzrost pola w tym samym kierunku prowadzi do odwrócenia domen i powtórzenia procesu porządkowania w przeciwnym kierunku.

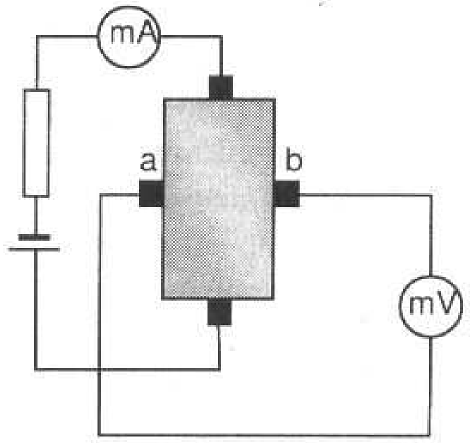
Zwróćmy uwagę, że indukcja B w próbce, a także jej namagnesowanie zależą nie tylko od wartości pola magnesującego H, lecz również od „historii" próbki, tzn. od jej dotychczasowego stanu. Pełny przebieg zależności indukcji od natężenia pola magnetycznego nosi nazwę *pętli histerezy.* Jej typowy kształt przedstawiono na rys. 32.1.

Pomiary

Do zmierzenia indukcji magnetycznej używamy pierścienia żelaznego, w którym jest wycięta wąska szczelina prostopadła do linii indukcji. Indukcja w wąskiej szczelinie mało się różni od wartości we wnętrzu ferromagnetyku.

Pomiaru indukcji w szczelinie dokonujemy za pomocą *halotronu*. Podstawą działania halotronu jest *zjawisko Halla*, polegające na powstawaniu różnicy potencjałów V_H między punktami a i b (rys. 32.2) cienkiej płytki półprzewodnika lub przewodnika w wyniku oddziaływania pola magnetycznego na poruszające się ładunki elektryczne. Ładunki tworzące prąd i_H znajdują się w polu magnetycznym prostopadłym do kierunku prądu. W takiej sytuacji na ładunki działa siła Lorentza spychająca je w kierunku a–b, co wywołuje różnicę potencjałów między tym punktami.





Rys. 32.2. Halotron w polu magnetycznym (powyżej) oraz układ do pomiaru napięcia Halla (obok)

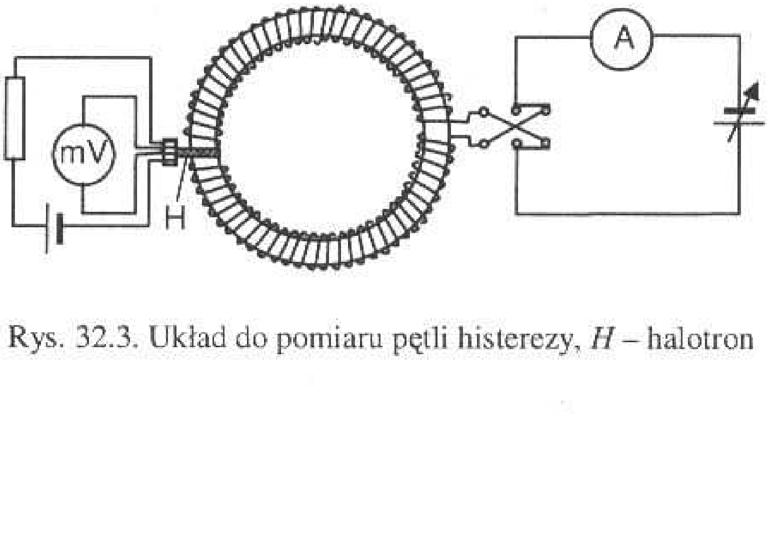
Różnica potencjałów V_H, zwana też *napięciem Halla*, jest proporcjonalna zarówno do płynącego przez halotron prądu, jak i do indukcji magnetycznej oraz zależy od rodzaju materiału i wymiarów halotronu

$$V_H = \gamma i_H B \tag{32.5}$$

Współczynnik γ, zwany *czułością halotronu*, jest określony przez indywidualne właściwości przyrządu. Gdy jest znana czułość, pomiar indukcji magnetycznej sprowadza się do zmierzenia napięcia Halla oraz prądu halotronu i wykorzystania równania (32.5).

Materiał ferromagnetyczny, który jest obiektem naszego badania, ma kształt pierścienia toroidalnego z wyciętą szczeliną umożliwiającą umieszczenie w niej halotronu. Na pierścieniu jest nawinięte uzwojenie, przez które płynie prąd magnesujący.

Układ pomiarowy do wyznaczenia pętli histerezy przedstawiono na rys. 32.2. Składa się on z dwóch części. Pierwszą stanowi układ zasilania uzwojenia magnesującego (na prawo od pierścienia), który zawiera źródło prądu stałego, amperomierz i przełącznik kierunku prądu. Część druga jest to obwód pomiaru napięcia Halla – zawiera halotron, zasilacz halotronu i miliwoltomierz. Ten sam układ w ujęciu, które wyraźniej pokazuje jego funkcje, przedstawiono także na rys. 32.3.



Rys. 32.3. Układ do pomiaru pętli histerezy, H – halotron

Przebieg ćwiczenia

1. Połączyć układ pomiarowy według schematu na rys. 32.2.
2. Zmieniać stopniowo natężenie prądu magnesującego oraz odczytywać odpowiednie wartości napięcia Halla V_H. Aby uzyskać pełną pętlę histerezy, należy zmieniać natężenie pola magnesującego w następujący sposób:
   a) zwiększać natężenie pola (przez wzrost prądu magnesującego) od zera do wartości maksymalnej H_{max},
   b) zmniejszać natężenie pola od H_{max} do zera,
   c) zmienić kierunek prądu na przeciwny i dla tego kierunku powtórzyć punkty a) i b),
   d) jeszcze raz zmienić kierunek prądu i zwiększać natężenie pola do wartości maksymalnej.
3. Obliczyć wartości natężenia pola magnetycznego H oraz wartości indukcji magnetycznej.
4. Wykreślić zależność $B = f(H)$.
5. Obliczyć błędy, stosując metodę różniczki logarytmicznej lub zupełnej do równania (32.4) i do przekształconego równania (32.5).
6. Zaznaczyć prostokąty błędów dla kilku punktów na wykresie.

Zestaw ćwiczeniowy

Pierścień żelazny z nawiniętym uzwojeniem magnesującym, autotransformator (rozdz. 2.8), 2 źródła prądu stałego, amperomierz prądu zmiennego, amperomierz prądu stałego, miliamperomierz, przełącznik kierunku prądu (rozdz. 10), miliwoltomierz (rozdz. 11), halotron

Pojęcia kluczowe

- Ferromagnetyki, temperatura Curie
- Indukcja magnetyczna w próżni i w materii, przenikalność magnetyczna
- Natężenie pola magnetycznego, jednostki natężenia
- Domeny ferromagnetyczne, mikroskopowy obraz magnesowania
- Pętla histerezy, namagnesowanie spontaniczne, pole koercji
- Zjawisko Halla, siła Lorentza, napięcie Halla, halotron, pomiar indukcji.

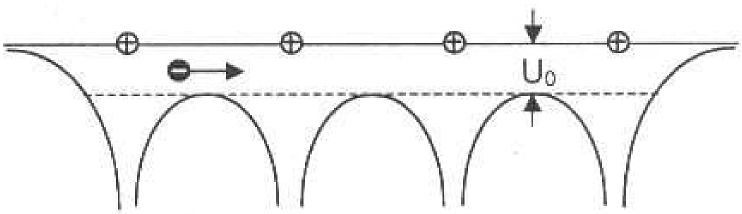
33. Wyznaczanie stałej Plancka i pracy wyjścia na podstawie zjawiska fotoelektrycznego

Wprowadzenie

W obwodzie elektrycznym zawierającym źródło napięcia i dwie metalowe płytki rozdzielone warstwą próżni na ogół nie płynie prąd elektryczny. Jeżeli jednak płytka o potencjale ujemnym zostanie oświetlona, to pojawi się prąd – tym większy, im silniejsze będzie oświetlenie. To zjawisko nosi nazwę *fotoelektrycznego*. Jego badania wykazały, że:

- fotoprąd pojawia się natychmiast po naświetleniu metalu (po czasie $\approx 10^{-9}$s);
- prąd fotoelektryczny, czyli liczba emitowanych w jednostce czasu elektronów, jest proporcjonalny do natężenia oświetlenia;
- energia fotoelektronów nie zależy od natężenia oświetlenia; jest ona proporcjonalna do częstotliwości drgań fali świetlnej;
- fotoprąd pojawia się tylko w przypadku, gdy częstotliwość promieniowania jest większa od pewnej wartości granicznej.

Powyższe właściwości mogą być wyjaśnione na poziomie mikroskopowym tylko na gruncie teorii kwantowej światła. W ciałach stałych, będących przewodnikami, elektrony walencyjne nie są związane z macierzystymi atomami – poruszają się one swobodnie w sieci krystalicznej, tworząc tzw. gaz elektronowy. Swobodny ruch elektronów w kryształach metalicznych wynika z *rozkładu energii* potencjalnej. W wyniku wzajemnego oddziaływania atomów (oznaczonych na rys. 33.1 kółkami z plusem) bariery potencjału oddzielające sąsiednie atomy ulegają obniżeniu do wartości mniejszej niż całkowita energia elektronu i nie stanowią przeszkody w ruchu elektronów (czarna kulka z minusem).



Rys. 33.1. Energia potencjalna w krysztale

Atomy znajdujące się na powierzchni kryształu (skrajne z lewej i prawej strony) mają sąsiadów tylko od strony wnętrza i dlatego energia potencjalna w pobliżu tych atomów jest inna niż w głębi kryształu. Energia potencjalna przy powierzchni jest większa, więc powierzchnia stanowi barierę dla elektronów i nie mogą one opuścić kryształu. Obrazowo można powiedzieć, że elektrony są uwięzione w „pudle" potencjału – mogą się swobodnie poruszać w jego wnętrzu, lecz nie mogą przejść przez jego ściany.

Opuszczenie metalu przez elektron (pokonanie bariery potencjału U_0) jest możliwe, jeśli uzyska on dodatkową energię o wartości przynajmniej eU_0. Ta energia nazywa się *pracą wyjścia*.

Źródłem energii mogą być:

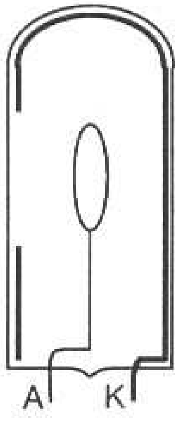
- podwyższona temperatura – zachodzi wówczas zjawisko *termoemisji*,
- silne pole elektryczne – zachodzi *emisja polowa*,
- bombardowanie cząstkami o dostatecznie dużej energii kinetycznej oraz
- oświetlenie kryształu.

W ostatnim przypadku mamy do czynienia ze *zjawiskiem fotoelektrycznym*. Wybicie elektronu z metalu przez foton zachodzi tylko wtedy, gdy energia fotonu $h\nu$ jest równa lub większa od pracy wyjścia W. Częstotliwość odpowiadająca temu warunkowi jest wspomnianą wyżej *częstotliwością graniczną*

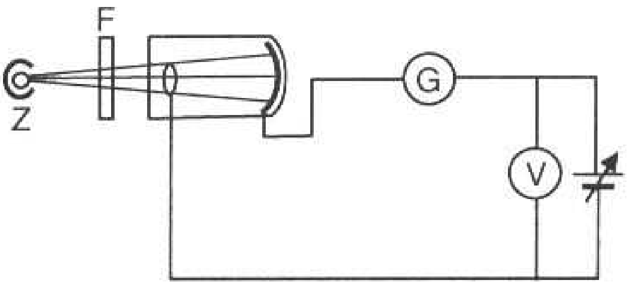
Przemiany energii w zjawisku fotoelektrycznym opisuje *równanie Einsteina*:

$$h\nu = W + \frac{1}{2}mv^2, \qquad (33.1)$$

gdzie: h – *stała Plancka* równa $6{,}62 \cdot 10^{-34}$ J·s, ν – częstotliwość fali świetlnej, W – praca wyjścia, m – masa elektronu, v – jego prędkość poza metalem. To równanie należy traktować jako bilans energii – energia padającego fotonu zamienia się na pracę wyjścia i na energię kinetyczną elektronu.



Rys. 33.2. Budowa fotokomórki; A – anoda, K – katoda



Rys. 33.3. Układ do badania charakterystyki fotokomórki; Z – źródło światła, F – filtr, G – galwanometr

Zjawisko fotoelektryczne znalazło zastosowanie praktyczne w *fotokomórkach*. Budowę fotokomórki pokazano na rys. 33.2. Składa się ona z bańki szklanej, której tylna ścianka jest pokryta wewnątrz warstwą metalu o małej pracy wyjścia. W środku bańki znajduje się pętla z drutu stanowiąca anodę. W zależności od zawartości bańki fotokomórki mogą być próżniowe lub gazowane.

W fotokomórce *próżniowej* całkowity prąd stanowią elektrony wybite z katody i przyciągnięte przez anodę. Natężenie prądu jest stosunkowo małe.

Większe natężenie prądu uzyskuje się w fotokomórkach *gazowanych*, wypełnionych niewielką ilością gazu szlachetnego, w których fotoelektrony pierwotne mogą jonizować atomy gazu, zwiększając w ten sposób ilość nośników prądu.

Elektrony wybite z katody fotokomórki próżniowej tworzą chmurę elektronową odpychającą następne elektrony dążące w jej kierunku. W miarę wzrostu napięcia na anodzie chmura jest coraz silniej przyciągana do anody, aż przy pewnym napięciu każdy fotoelektron dochodzi do anody. Mimo dalszego wzrostu napięcia nie następuje dalszy wzrost natężenia fotoprądu – osiągnięty został stan *nasycenia*. Aby uzyskać większy fotoprąd, trzeba zwiększyć oświetlenie.

Prąd fotoelektryczny płynie nawet wtedy, gdy między anodą a katodą nie ma napięcia. Dzieje się tak na skutek energii kinetycznej posiadanej przez elektrony w momencie wybicia z metalu. Całkowity zanik prądu można spowodować, przykładając napięcie o przeciwnej polaryzacji, tzn. niższy potencjał na anodę. Jeżeli napięcie ma odpowiednią wartość, zwaną *potencjałem hamującym* V_h, to następuje całkowite zahamowanie elektronów – ich energia kinetyczna zostaje zużyta na wykonanie pracy przeciwko polu elektrycznemu:

$$\frac{1}{2}mv^2 = eV_h. \tag{33.2}$$

Uwzględniając powyższy związek, możemy przekształcić równanie (33.1) do postaci

$$V_h = \frac{h}{e}\nu - \frac{W}{e}. \tag{33.3}$$

Jak widać z powyższego związku, napięcie potrzebne do zahamowania fotoelektronów jest tym większe, im większa jest częstotliwość oświetlającego promieniowania.

Pomiary i obliczenia

W niniejszym ćwiczeniu wykonujemy dwa zadania:

- Wyznaczamy *charakterystykę* prądowo-napięciową fotokomórki za pomocą układu przedstawionego na rys. 33.3.
- Wyznaczamy stałą Plancka z pomiarów napięcia hamowania dla oświetleń o różnych długościach fal.

Fotokomórka jest oświetlona światłem żarówki Z przechodzącym przez odpowiedni filtr F, który przepuszcza tylko światło o określonej długości fali. Do dyspozycji mamy różne filtry, dzięki czemu możemy dobierać różne długości fali. Regulowane napięcie podajemy na fotokomórkę z zasilacza prądu stałego. Prąd mierzymy za pomocą mikroamperomierza lub galwanometru G. Zamiast galwa-

nometru można użyć odpowiedniego opornika i równolegle do niego włączonego woltomierza, który mierzy napięcie spowodowane przepływem fotoprądu. Wartość fotoprądu obliczamy z prawa Ohma.

W celu wyznaczenia napięcia hamowania V_h należy ustawić niewielkie napięcie dodatnie (na anodzie) i powoli je zmniejszając, doprowadzić do zerowej wartości fotoprądu. Nastąpi to przy pewnym napięciu ujemnym, które jest właśnie napięciem hamowania. Przed rozpoczęciem tych pomiarów należy dokładnie ustalić wychylenie zerowe miernika przez odczyt wskazania prądu przy odłączonym i zwartym wejściu miernika. Do wykresu i do obliczeń bierzemy wartość bezwzględną napięcia hamowania.

Postępując w ten sposób, dla różnych długości fali otrzymujemy dane do wykresu $V_h = f(\nu)$. Na podstawie wykresu zależności $V_h = f(\nu)$ można znaleźć stałą Plancka h oraz pracę wyjścia W. Współczynnik nachylenia prostej, opisanej równaniem (33.3), wynosi h/e, a punkt przecięcia prostej z osią rzędnych ma wartość W/e. Te same parametry prostej – oznaczmy je odpowiednio a i b – można wyliczyć, stosując regresję liniową do punktów pomiarowych. Z porównania uzyskujemy:

$$\frac{h}{e} = a, \quad \frac{-W}{e} = b. \tag{33.4}$$

Po przekształceniu powyższych równań otrzymujemy ostateczną postać wyrażeń na stałą Plancka i pracę wyjścia

$$h = ae, \quad W = be. \tag{33.5}$$

Przebieg ćwiczenia

1. Połączyć obwód według schematu z rys. 33.3.
2. Nastawić filtr, przy którym fotoprąd jest względnie duży.
3. Przekonać się bezpośrednio o występowaniu zjawiska fotoelektrycznego przez zasłanianie i odsłanianie wiązki światła padającego na fotokomórkę i obserwację prądu.
4. Wykonać pomiary fotoprądu w zależności od napięcia w zakresie od 20 V do –2 V dla uzyskania charakterystyki prądowo-napięciowej fotokomórki.
5. Sporządzić wykres zależności fotoprądu od napięcia
6. Wyznaczyć napięcie hamowania (opis powyżej). Wykonać te pomiary dla wszystkich filtrów.
7. Sporządzić wykres zależności potencjału hamowania od częstotliwości.
8. Obliczyć parametry a i b regresji liniowej oraz ich błędy.
9. Wyznaczyć stałą Plancka i pracę wyjścia.
10. Obliczyć błędy metodą różniczki zupełnej.
11. Zaokrąglić obliczone wartości i zapisać wyniki w końcowej postaci.

Zestaw ćwiczeniowy

Fotokomórka, lampa oświetlająca, zasilacz lampy, zasilacz fotokomórki, mikroamperomierz, woltomierz, zasilacz regulowany, filtry barwne

Pojęcia kluczowe

- Zjawisko fotoelektryczne: opis makroskopowy, opóźnienie fotoprądu względem oświetlenia, natężenie fotoprądu a oświetlenie, energia elektronów a oświetlenie
- Opis mikroskopowy, równanie Einsteina, praca wyjścia (patrz też rozdz. 34), częstotliwość (długość fali) graniczna
- Fotokomórka, napięcie hamowania, metoda wyznaczania stałej Plancka i pracy wyjścia
- Regresja liniowa

34. Wyznaczanie bariery potencjału na złączu *p–n*

Wprowadzenie

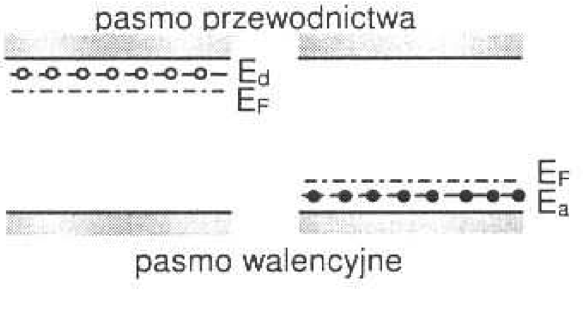
Dioda *p–n* jest jednym z najpowszechniej stosowanych elementów elektronicznych. Ze względu na asymetryczną charakterystykę prądowo-napięciową najczęściej stosuje się diodę jako element prostowniczy. Diodę stanowią dwa zetknięte ze sobą półprzewodniki, z których jeden jest typu *p*, a drugi typu *n*. Na rysunku 34.1 przedstawiono schemat energetyczny obu rodzajów półprzewodników.

Gdy oba półprzewodniki doprowadzimy do ścisłego kontaktu, następuje przepływ elektronów do części *p* oraz dziur do części *n* w wyniku termoemisji. Ta wymiana nośników ustaje, gdy zrównają się poziomy Fermiego i między obu częściami diody wytworzy się różnica potencjałów φ i różnica energii potencjalnej $e\varphi$ (e oznacza ładunek elektronu). Schemat energetyczny diody przedstawiono na rys. 34.2. Złączem jest obszar, w którym pasma nie są płaskie, koncentracja elektronów jest mniejsza niż w części *n*, a dziur mniejsza niż w części *p*. Na rysunku zaznaczono koncentrację nośników w obu obszarach – N oznacza koncentrację elektronów, a P – koncentrację dziur, indeksy *n* i *p* wskazują, do którego obszaru dana koncentracja się odnosi.

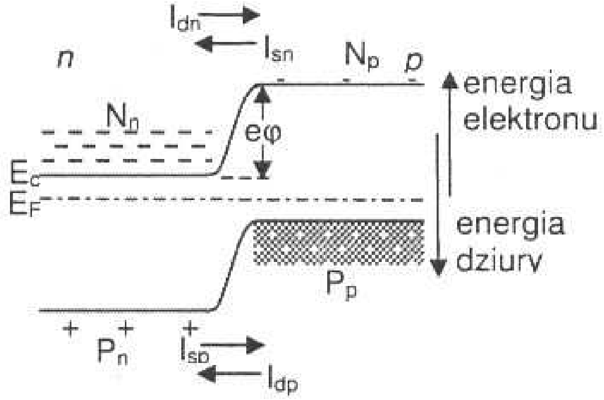
Widoczne jest, że w obszarze złącza jest mało nośników, więc obszar ten stanowi utrudnienie dla przepływu prądu. Miarą tego utrudnienia jest różnica potencjałów na złączu. Zwróćmy uwagę, że złącze stanowi barierę zarówno dla elektronów poruszających się w prawo, jak i dla dziur poruszających się w lewo, ponieważ na rysunku energia elektronów rośnie do góry, natomiast energia dziur (ładun-

ków dodatnich) wzrasta w kierunku do dołu. Zatem dla obu rodzajów nośników przejście przez złącze jest związane z wykonaniem pracy $e\varphi$.

Przedstawiona sytuacja dotyczy nośników większościowych, tzn. elektronów z obszaru n i dziur z obszaru p. Natomiast dla nośników mniejszościowych, czyli elektronów z obszaru p i dziur z obszaru n, bariera nie stanowi przeszkody, ponieważ ich ruch odbywa się w kierunku ku mniejszej energii (elektrony w lewo, dziury w prawo). Bariera potencjału na złączu może być zwiększona lub zmniejszona przez przyłożenie do diody napięcia V ze źródła zewnętrznego. Wtedy



Rys. 34.1. Pasma i poziomy energetyczne w półprzewodniku typu n (po lewej) i w półprzewodniku typu p (po prawej); E_F – energia Fermiego, E_a – energia domieszek akceptorowych, E_d – energia domieszek donorowych



Rys. 34.2. Schemat energetyczny diody p–n

$$\varphi' = \varphi \pm V\,, \tag{34.1}$$

przy czym znak + odnosi się do przypadku, gdy do części p jest przyłożony biegun ujemny źródła – mówimy wtedy, że dioda jest spolaryzowana zaporowo. W przeciwnym przypadku mówimy o polaryzacji diody w kierunku przewodzenia.

W diodzie p–n występują dwie przyczyny ruchu nośników:
- dążenie do znalezienia się w obszarze o najmniejszej energii potencjalnej,
- dążenie do wyrównania koncentracji, czyli dyfuzja nośników.

Mechanizm pierwszy powoduje ruch elektronów z obszaru p do obszaru n oraz ruch dziur z obszaru n do obszaru p. Suma strumieni tych nośników tworzy prąd nasycenia I_s:

$$I_s = I_{sn} + I_{sp}\,, \tag{34.2}$$

który zależy tylko od koncentracji N_p i P_n nośników mniejszościowych, a nie zależy od przyłożonego napięcia.

Koncentracja nośników w danym paśmie zależy wykładniczo od położenia pasma względem poziomu Fermiego E_F. Jak wynika z rys. 34.2, różnica energii między pasmem przewodnictwa części p a poziomem E_F wynosi $(E_c - E_F) + e\varphi$. Koncentracja elektronów jest określona wzorem:

$$N_p = N_c \mathrm{e}^{-\frac{(E_c - E_F) + e\varphi}{kT}}, \tag{34.3}$$

gdzie N_c jest w przybliżeniu wielkością stałą, zwaną *efektywną gęstością stanów*.

Gdy złącze jest symetryczne, koncentracja dziur P_n ma taką samą wartość, tzn. $P_n = N_p$.

Proporcjonalność natężenia prądu nasycenia do koncentracji nośników mniejszościowych możemy zatem wyrazić następującym równaniem:

$$I_s = C_c \mathrm{e}^{-\frac{(E_c - E_F) + e\varphi}{kT}}, \tag{34.4}$$

w którym stała C zawiera efektywną gęstość stanów, ruchliwość nośników oraz powierzchnię złącza.

Dyfuzja w złączu *p–n* polega na takim ruchu nośników, który prowadzi do zmniejszenia różnicy koncentracji zarówno elektronów, jak i dziur po obu stronach złącza. Prąd związany z tym ruchem nazywa się prądem dyfuzji I_d i składa się z prądu elektronowego i dziurowego:

$$I_d = I_{dn} + I_{dp}. \tag{34.5}$$

Prąd dyfuzyjny ma kierunek przeciwny do kierunku prądu nasycenia, stąd wypadkowy prąd płynący przez złącze *p–n* jest różnicą obu prądów:

$$I = I_d - I_s. \tag{34.6}$$

Prąd dyfuzyjny elektronów jest proporcjonalny do różnicy koncentracji elektronów, czyli do $(N_n - N_p)$ oraz do prawdopodobieństwa pokonania bariery potencjału P_φ.

$$I_{dn} \propto (N_n - N_p)\mathrm{P}_\varphi. \tag{34.7}$$

Badane złącze, podobnie jak znaczna część złączy produkowanych przemysłowo, składa się z półprzewodników dość silnie domieszkowanych, w których liczba nośników większościowych jest znacznie większa niż liczba nośników mniejszościowych, czyli $N_n >> N_p$.

Prawdopodobieństwo P_φ wyraża się wzorem

$$\mathrm{P}_\varphi = \mathrm{e}^{-\frac{e(\varphi \pm V)}{kT}}, \tag{34.8}$$

a koncentrację wzorem:

$$N_n = N_c \mathrm{e}^{-\frac{(E_c - E_F)}{kT}}. \tag{34.9}$$

Po wstawieniu dwóch ostatnich wyrażeń do równania (34.7) otrzymujemy równanie określające prąd dyfuzyjny elektronów:

$$I_{dn} \propto N_c \mathrm{e}^{-\frac{(E_c - E_F + e\varphi)}{kT}} \mathrm{e}^{\pm\frac{eV}{kT}}. \tag{34.10}$$

W analogiczny sposób otrzymuje się równanie dla prądu dyfuzji dziur. Występuje w nim identyczny czynnik wykładniczy, a jedyna różnica polega na innej wartości efektywnej gęstości stanów.

Całkowity prąd dyfuzji można zatem wyrazić w postaci:

$$I_d = C\mathrm{e}^{-\frac{(E_c - E_F + e\varphi)}{kT}} \mathrm{e}^{\pm\frac{eV}{kT}}, \tag{34.11}$$

gdzie stała C ma taką samą wartość jak w równaniu (34.4). Znak – przy V odnosi się do polaryzacji zaporowej złącza, a + do polaryzacji w kierunku przewodzenia.

Z porównania równań (34.11) i (34.4) widać, że gdy napięcie zewnętrzne V jest równe zeru, wówczas prąd dyfuzyjny i prąd nasycenia są równe i wypadkowy prąd płynący przez złącze jest równy zeru.

W dalszym ciągu będziemy opuszczać znak przy napięciu, przyjmując, że wartość V jest dodatnia dla kierunku przewodzenia, a ujemna dla zaporowego. Po uwzględnieniu zależności (34.4) w równaniu (34.11) możemy wyrazić prąd dyfuzyjny w postaci:

$$I_d = I_s \mathrm{e}^{\frac{eV}{kT}}, \tag{34.12}$$

a prąd wypadkowy płynący przez złącze, jak wynika z równań (34.6) i (34.12):

$$I = I_s\left(\mathrm{e}^{\frac{eV}{kT}} - 1\right). \tag{34.13}$$

Zasada pomiaru

Spośród wielkości występujących w równaniu (34.13) łatwe do bezpośredniego pomiaru są: natężenie prądu I, napięcie V i temperatura T. Metoda pomiarowa polega na wykorzystaniu powyższych równań w taki sposób, aby z pomiarów dostępnych wielkości można było wyznaczyć barierę potencjału φ. W równaniu (34.13) wielkość φ nie występuje w sposób jawny, ale jest ukryta w I_s. Dlatego pierwszym krokiem, który musimy wykonać, jest wyznaczenie prądu nasycenia I_s. W zasadzie można zmierzyć prąd nasycenia, polaryzując złącze dość dużym (kilka woltów) napięciem zaporowym. W tej sytuacji $eV/(kT) << -1$, wyrażenie wykładnicze dąży do zera i cały mierzony prąd jest właśnie równy $-I_s$. Jednakże jest to na ogół wartość bardzo mała i ten sposób pomiaru wymagałby bardzo czułych przyrządów.

Wygodniej jest wykorzystać charakterystykę w kierunku przewodzenia, chociaż wymaga to wykonania serii pomiarów. Zauważmy, że dla napięć spełniających warunek $eV \geq 5kT$, wyrażenie wykładnicze jest ponad stokrotnie większe od jedności, więc dla tego zakresu jedynkę w równaniu (34.13) możemy zaniedbać. Wówczas charakterystyka prądowo-napięciowa jest opisana równaniem:

$$I = I_s e^{\frac{eV}{kT}} \qquad (\text{dla } eV \geq 5kT), \tag{34.14}$$

które po obustronnym zlogarytmowaniu przyjmuje postać:

$$\ln I = \ln I_s + \frac{e}{kT} V. \tag{34.15}$$

Jeżeli powyższe równanie wykreślimy we współrzędnych $x = V$, $y = \ln I$, otrzymamy linię prostą przecinającą oś y w punkcie o wartości $\ln I_s$.

Znając tę wartość, zastosujemy równanie (34.4), które po zlogarytmowaniu przyjmuje postać:

$$\ln I_s = \ln C - \frac{1}{kT}(E_c - E_F + e\varphi). \tag{34.16}$$

W diodach przemysłowych, a także w diodzie badanej w ćwiczeniu poziom Fermiego leży blisko pasma dozwolonego – wartość $E_c - E_F$ jest rzędu 10^{-2} eV i jest co najmniej o rząd wielkości mniejsza niż wysokość bariery $e\varphi$, wobec czego możemy ją w równaniu (34.16) zaniedbać. Uwzględniwszy to przybliżenie, możemy wyznaczyć φ:

$$\varphi = \frac{kT}{e}(\ln I_s - \ln C). \tag{34.17}$$

Otrzymane równanie daje nam szukaną wysokość bariery φ, jeżeli skądinąd znamy wartość stałej C (stała Boltzmanna k i ładunek elektronu e są stałymi uniwersalnymi).

Jeżeli stałej C nie znamy, musimy wykonać kilka charakterystyk I–V dla różnych wartości temperatury, dla każdej temperatury znaleźć prąd nasycenia I_s i następnie wykonać wykres we współrzędnych $x = 1/T$, $y = \ln I_s$. Pamiętając o zaniedbaniu wyrazu $E_c - E_F$, przepiszemy równanie (34.16) w postaci liniowej:

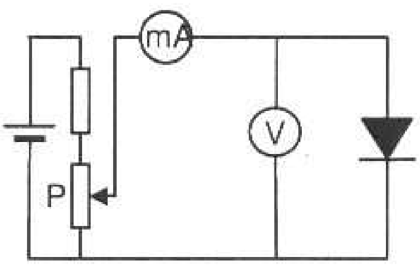
$$y = \ln C - \frac{e\varphi}{k} x. \tag{34.18}$$

Wykresem powyższego równania jest linia prosta, której współczynnik nachylenia $a = e\varphi/k$. Po obliczeniu współczynnika nachylenia metodą regresji liniowej znajdujemy barierę potencjału ze wzoru:

$$\varphi = \frac{ak}{e}. \qquad (34.19)$$

Podsumujmy: wyznaczenie bariery potencjału wymaga następujących kroków:

- wykonania charakterystyk I–V dla kilku wartości temperatury,
- wykonania wykresów $\ln I = f(V)$ i obliczenia z nich prądów nasycenia na podstawie równania (34.15) i następującego po nim opisu,
- wykonania wykresu $\ln I_s = f(1/T)$ i obliczenia bariery potencjału z równania (34.19) – objaśnionego w dwóch poprzedzających akapitach.



Rys. 34.3. Układ do pomiaru charakterystyk prądowo-napięciowych

Układ pomiarowy przedstawiono na rys. 34.3. Badana dioda jest umieszczona w naczyniu z cieczą, której temperaturę możemy zmieniać. Przyjmujemy, że temperatura diody jest równa temperaturze cieczy w naczyniu. Po każdym wlaniu cieczy należy kilka minut odczekać do ustalenia się równowagi termicznej.

Przebieg ćwiczenia

1. Połączyć obwód według rys. 34.3.
2. Napełnić naczynie Dewara do około 3/4 pojemności cieczą o wymaganej temperaturze.
3. Potencjometrem P nastawić maksymalne napięcie $V \approx 0{,}7$ V.
4. Gdy ustali się wskazanie termometru, wykonać pomiary prądu dla napięć malejących aż do najmniejszej wartości, przy której jest możliwy odczyt prądu.
5. Wykonać charakterystyki I–V dla kilku wartości temperatury, zmieniając ciecz w naczyniu Dewara.
6. Sporządzić wykresy $\ln I - V$ dla każdej temperatury.
7. Stosując regresję liniową, znaleźć $\ln I_s$ dla każdej temperatury.
8. Wykonać wykres $\ln I_s - (1/T)$.
9. Stosując regresję liniową, znaleźć wartość i błąd współczynnika nachylenia.
10. Obliczyć wysokość bariery potencjału ze wzoru (34.19).
11. Obliczyć błąd metodą różniczki zupełnej.
12. Wykonać zaokrąglenia i przedstawić ostateczną postać wyniku.

Zestaw ćwiczeniowy

Dioda, potencjometr, baterie, naczynie Dewara, miliamperomierz wielozakresowy, woltomierz, termometr

Pojęcia kluczowe

- Budowa diody *p–n*, schemat energetyczny diody
- Nośniki większościowe i mniejszościowe, koncentracja nośników w paśmie dozwolonym, poziom Fermiego (rozdz. 36)
- Prąd nasycenia, prąd dyfuzji, wyznaczanie prądu nasycenia, obliczanie wysokości bariery

35. Wyznaczanie zależności przewodnictwa od temperatury dla przewodników i półprzewodników

Wprowadzenie

Zgodnie z prawem Ohma w najogólniejszej postaci, gęstość prądu w dowolnym miejscu materiału przewodzącego jest wprost proporcjonalna do natężenia pola elektrycznego.

$$j=\sigma E\ . \tag{35.1}$$

W powyższym równaniu j oznacza *gęstość prądu* (stosunek prądu do powierzchni przekroju), E – natężenie pola elektrycznego. Współczynnik proporcjonalności σ nazywamy *przewodnictwem elektrycznym*. Wartość przewodnictwa jest określona bezpośrednio przez koncentrację i ruchliwość nośników ładunku.

$$\sigma = e(n\mu_n + p\mu_p).. \tag{35.2}$$

Koncentrację elektronów n i dziur p określamy jako liczbę tych nośników w jednostce objętości, a *ruchliwość* (elektronów – μ_e, dziur – μ_p) jest stosunkiem prędkości unoszenia do natężenia pola elektrycznego.

W półprzewodnikach zarówno koncentracja, jak i ruchliwość zależą od rodzaju materiału i od temperatury, więc przewodnictwo również zależy od tych parametrów.

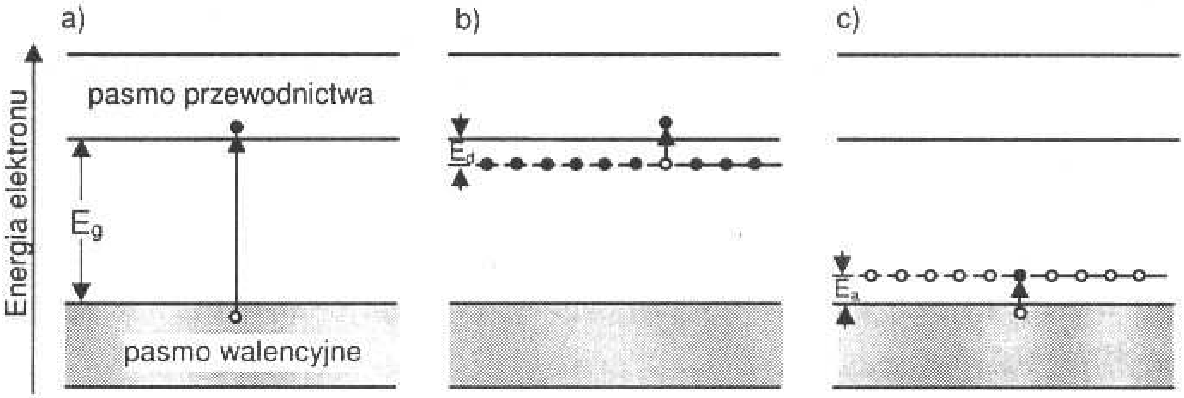
W przewodnikach (metalach) koncentracja nośników (znaczenie mają tylko elektrony) jest bardzo duża i nie zależy od temperatury, a o *zależności temperaturowej* przewodnictwa decyduje zmniejszanie się ruchliwości ze wzrostem

temperatury. Zależność tę zwykło się wyrażać przez opór ($R \sim 1/\sigma$) i ma ona dla metali postać:

$$R = R_0\left[1 + \alpha(T - T_0)\right], \tag{35.3}$$

gdzie R_0 jest oporem w temperaturze T_0, a α – średnim współczynnikiem temperaturowym oporu. Wzór (35.3) powinien być stosowany tylko w niezbyt dużym przedziale wartości temperatury, ponieważ współczynnik α zmienia się wraz z temperaturą.

W półprzewodnikach nośnikami prądu są elektrony w paśmie przewodnictwa i dziury w paśmie walencyjnym. Elektrony są dostarczane do pasma przewodnictwa albo z pasma walencyjnego (w półprzewodnikach samoistnych), albo z poziomów domieszkowych – donorowych (w półprzewodnikach *typu n*). Dziury natomiast powstają w paśmie walencyjnym po przejściu elektronu albo do pasma przewodnictwa, albo na poziomy domieszkowe – akceptorowe (w półprzewodnikach *typu p*).



Rys. 35.1. Pasma i poziomy energetyczne w półprzewodnikach samoistnych (a), półprzewodnikach typu n (b) oraz półprzewodnikach typu p; pełne kółka – elektrony, puste kółka – dziury, E_a, E_d – energia akceptorów i donorów

Przejścia elektronowe w półprzewodnikach pokazano na rys. 35.1. Liczba elektronów przechodzących na wyższy poziom energetyczny zależy wykładniczo od różnicy poziomów oraz od temperatury i wyraża ją w przypadku półprzewodników samoistnych wzór:

$$n = n_{0s} e^{-\frac{E_g}{2kT}}, \tag{35.4}$$

w którym: E_g – szerokość pasma zabronionego (patrz rys. 35.1), k – stała Boltzmanna, T – temperatura bezwzględna.

Ze względu na to, że każdemu elektronowi w paśmie przewodnictwa odpowiada swobodna dziura w paśmie walencyjnym, koncentracje obu rodzajów nośników są takie same: $n = p$.

W przypadku półprzewodników domieszkowych *koncentracje* nośników są określone przez różnice energii E_d oraz E_a oraz przez temperaturę:

$$n = n_{0d} e^{-\frac{E_d}{2kT}}, \qquad p = p_{0a} e^{-\frac{E_a}{2kT}}. \tag{35.5}$$

Gdy wzrasta temperatura, liczba nośników pochodzących z poziomów domieszkowych również rośnie, aż do chwili, gdy wszystkie elektrony opuszczą poziomy donorowe lub zapełnią poziomy akceptorowe. Dalsze podwyższanie temperatury nie prowadzi do wzrostu koncentracji nośników. W tym zakresie wartości temperatury liczba nośników samoistnych jest jeszcze bardzo mała – obserwujemy więc zjawisko *nasycenia domieszkowego*. Dopiero w wyższej temperaturze zaczynają przeważać nośniki pochodzące z przejść międzypasmowych i koncentracja zaczyna szybko wzrastać.

Ruchliwość nośników, podobnie jak w metalach, zmniejsza się z temperaturą. Jednak zmiany te są znacznie wolniejsze niż zmiany koncentracji, więc możemy przyjąć, że przewodnictwo zależy od temperatury tak samo jak koncentracja nośników.

Po uwzględnieniu równań (35.4) i (35.5) we wzorze (35.2) możemy wyrazić temperaturową zależność przewodnictwa w postaci:

$$\sigma = C_1 e^{-\frac{E_g}{2kT}} + C_2 e^{-\frac{E_{dom}}{2kT}}, \tag{35.6}$$

gdzie przez E_{dom} rozumiemy jedną z wielkości E_d lub E_a, zależnie od rodzaju półprzewodnika. Stałe C zawierają ruchliwość i wielkość n_0.

W odpowiednio niskiej temperaturze można zaniedbać pierwszy składnik we wzorze (35.6), natomiast w wysokiej temperaturze, gdy nastąpi nasycenie poziomów domieszkowych, można zaniedbać składnik drugi. W pierwszym przypadku

$$\sigma_{dom} = C_2 e^{-\frac{E_{dom}}{2kT}}, \tag{35.7}$$

w drugim zaś

$$\sigma_{sam} = C_1 e^{-\frac{E_g}{2kT}}. \tag{35.8}$$

Zależność temperaturową przewodnictwa półprzewodnika najdogodniej jest analizować za pomocą wykresu tej zależności w skali półlogarytmicznej. Po zlogarytmowaniu wzoru (35.7) lub (35.8) otrzymamy wyrażenie postaci:

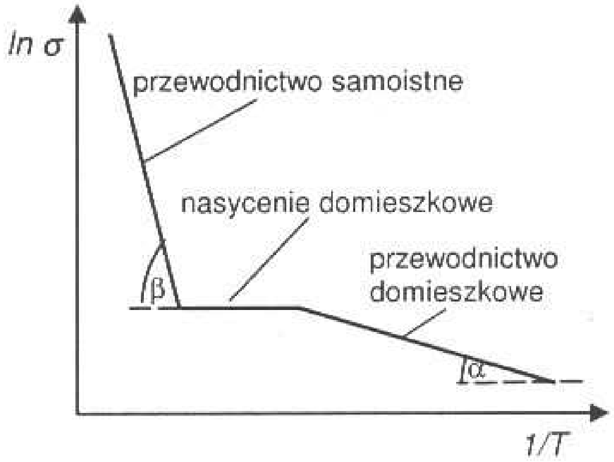
$$\ln\sigma = \ln C - \frac{E}{2k} \cdot \frac{1}{T}. \tag{35.9}$$

Jeżeli teraz na osi odciętych będziemy odkładać odwrotność temperatury, a na osi rzędnych ln σ, to pełny wykres zależności przewodnictwa półprzewodnika od

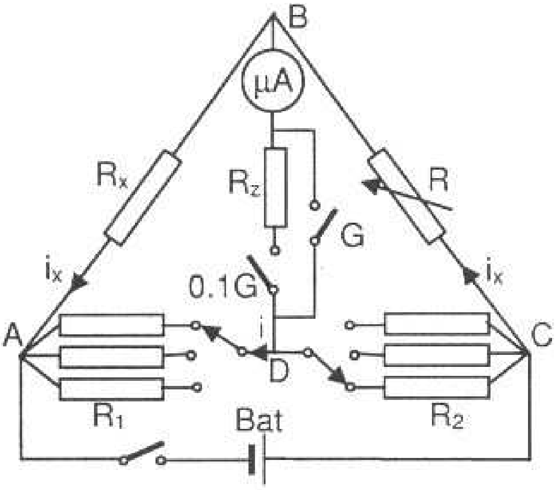
temperatury będzie mieć postać linii łamanej (rys. 35.2). W zakresie wartości temperatury stosowanym w laboratorium fizycznym obserwujemy tylko przewodnictwo domieszkowe.

Pomiary i obliczenia

W celu wyznaczenia szukanych zależności mierzymy opór elektryczny przewodnika drutowego i półprzewodnika (termistora) w różnej temperaturze. Badane materiały umieszczamy w ultratermostacie i mierzymy ich opory za pomocą mostka Wheatstone'a.



Rys. 35.2. Logarytm przewodnictwa w funkcji odwrotności temperatury



Rys. 35.3. Budowa laboratoryjnego mostka Wheatstone'a

Budowę *mostka Wheatstone'a* przedstawiono na rys. 35.3. Główną czynnością przy posługiwaniu się mostkiem jest dobranie oporu R (składa się na niego szereg oporników w układzie dekadowym) w taki sposób, aby uzyskać równowagę mostka polegającą na zerowaniu się prądu płynącego przez galwanometr G.

Warunkiem równowagi jest równość potencjałów elektrycznych w punktach B i D. Licząc potencjał względem punktu C, powyższy warunek wyrazimy w postaci:

$$R i_x = R_2 i . \tag{35.10}$$

Podobny warunek zachodzi dla gałęzi ABD:

$$R_x i_x = R_1 i . \tag{35.11}$$

Dzielimy oba równania stronami przez siebie i znajdujemy szukany opór:

$$R_x = \frac{R_1}{R_2} R . \tag{35.12}$$

Wartości oporników R_1 i R_2 są sekwencją potęg liczby 10, np. 1, 10, 100, 1000. Te oporniki umożliwiają pomiar oporu w bardzo szerokim zakresie.

Oznaczmy jednostkę największej dekady oporu R przez R_{max}. W celu znalezienia odpowiedniego ustawienia R_1 i R_2 najpierw ustawiamy wartość R na równą kilku jednostkom R_{max}, a R_2 – na wartość maksymalną. Następnie zmieniamy wartości R_1 aż do wystąpienia zmiany kierunku wychylenia galwanometru. Jeżeli kierunek wychylenia się nie zmieni w całym zakresie, należy zamienić rolami R_1 i R_2 – rozpocząć od ustawienia maksymalnej wartości R_1 i poszukiwać wartości R_2, przy której nastąpi zmiana kierunku wychylenia.

Po znalezieniu ustawienia R_1 i R_2 pozostawiamy je niezmienione do końca pomiaru danego opornika, a dalszą regulację prowadzimy za pomocą oporu R. Pokrętłami oporów dekadowych, rozpoczynając od największych, doprowadzamy do zawężania przedziału, w którym wychylenie galwanometru zmienia kierunek, aż do zerowego wychylenia galwanometru. Przycisk $0,1G$ włącza galwanometr przez opór zabezpieczający R_z zmniejszający czułość galwanometru. W celu dokładniejszego zrównoważenia mostka wciskamy z kolei przycisk G i powtarzamy czynności związane z osiągnięciem zerowego wychylenia, nie zmieniając największej dekady. Po uzyskaniu równowagi wyłączamy źródło prądu i kontrolujemy wskazanie zerowe galwanometru.

Budowa i działanie *ultratermostatu* są opisane w rozdziale 7. Zamiast w ultratermostacie oporniki można umieścić w kąpieli wodnej i podgrzewać ją elektrycznie.

Równanie (35.9) można wykorzystać do znalezienia energii poziomu domieszkowego w półprzewodniku. Jeżeli oznaczymy $E = E_{dom}$ oraz zastosujemy związek $\sigma \propto 1/R$, to otrzymamy równanie:

$$\ln\frac{1}{R} = \ln C - \frac{E_{dom}}{2k}\cdot\frac{1}{T}, \qquad (35.13)$$

które na wykresie $\ln(1/R) = f(1/T)$ przedstawia linię prostą o współczynniku nachylenia

$$a = \frac{E_{dom}}{2k}. \qquad (35.14)$$

Ten sam współczynnik nachylenia możemy wyznaczyć z regresji liniowej. Gdy jest on znany, wówczas ostatnie równanie umożliwia obliczenie E_{dom}.

Przebieg ćwiczenia

1. Włączyć do sieci ultratermostat, dołączyć baterie, galwanometr i badane oporniki do mostka Wheatstone'a.
2. Ustalić w ultratermostacie temperaturę około 20°C.
3. Zmierzyć opór przewodnika i półprzewodnika.

4. Zmieniać temperaturę co około 5°C w zakresie 20–90°C i mierzyć opory.
5. Wykreślić zależności $R = f(T)$ na wspólnym wykresie dla przewodnika i półprzewodnika. W razie potrzeby zastosować różne skale dla każdego opornika.
6. Dla półprzewodnika obliczyć ln $(1/R)$ oraz $1/T$ i sporządzić wykres zależności tych wielkości. Temperatura musi być wyrażona w kelwinach.
7. Za pomocą regresji liniowej obliczyć współczynnik nachylenia oraz jego błąd.
8. Wyznaczyć energię poziomu domieszkowego, korzystając z równania (35.14). Energię wyrazić w dżulach i elektronowoltach.
9. Obliczyć błąd E_{dom} metodą różniczki zupełnej.
10. Zaokrąglić obliczone wartości i przedstawić ostateczną postać wyniku.

Zestaw ćwiczeniowy

Ultratermostat (rozdz. 7), mostek Wheatstone'a, galwanometr, opornik drutowy, termistor

Pojęcia kluczowe

- Prawo Ohma, przewodnictwo, koncentracja, ruchliwość, współczynnik temperaturowy oporu
- Swobodne nośniki w półprzewodniku samoistnym i domieszkowym
- Zależność przewodnictwa od temperatury
- Mostek Wheatstone'a
- Obliczanie położenia poziomu domieszki lub szerokości przerwy zabronionej, elektronowolt

36. Wyznaczanie stałej Boltzmanna z charakterystyki tranzystora

Wprowadzenie

Stała Boltzmanna, oznaczona przez k, jest uniwersalną stałą fizyczną określoną przez stosunek dwóch innych stałych: stałej gazowej R i liczby Avogadra N_A:

$$k = \frac{R}{N_A}. \tag{36.1}$$

W kinetycznej teorii gazów wykazuje się, że średnia energia kinetyczna ruchu cieplnego cząstki w temperaturze T, przypadająca na jeden stopień swobody, wy-

nosi $1/2kT$ i nie zależy od rodzaju ruchu (postępowy, rotacyjny czy oscylacyjny) ani od wielkości cząstki.

Stała Boltzmanna występuje we wszystkich równaniach zawierających klasyczne lub kwantowe *funkcje rozkładu* energetycznego cząstek. Przypomnijmy kilka przykładów takich równań.

1. *Rozkład prędkości* drobin gazu jest opisany funkcją podaną po raz pierwszy przez Maxwella:

$$N_v dv = A(kT)^{-3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}, \tag{36.2}$$

przy czym $N_v dv$ w powyższym równaniu określa liczbę drobin, których prędkości są zawarte w wąskim przedziale $(v, v + dv)$. Maksimum tej funkcji przypada dla prędkości v_p, która jest najbardziej prawdopodobna w danej temperaturze – jej wartość jest określana m.in. przez stałą Boltzmanna $v_p = (2\,kT/m)^{1/2}$.

2. Prawdopodobieństwo zajęcia przez elektron poziomu energetycznego o wartości E w krysztale wyraża *funkcja rozkładu Fermiego-Diraca*:

$$f(E) = \frac{1}{e^{\frac{E-E_F}{kT}} + 1}, \tag{36.3}$$

gdzie E_F jest energią (poziomem) Fermiego. W niskiej temperaturze funkcja rozkładu ma ciekawy przebieg; mianowicie $f(E) = 1$, gdy $E < E_F$, oraz $f(E) = 0$, gdy $E > E_F$. Przy takiej funkcji rozkładu wszystkie poziomy powyżej E_F są puste ($f = 0$). Przejście od wartości 1 do zera odbywa się w wąskim przedziale energii – jego szerokość zależy od temperatury oraz wartości stałej Boltzmanna i wynosi około $5kT$.

3. W niskiej temperaturze lub dla dużych wartości energii (każdy z tych warunków wyraża się przez stałą Boltzmanna w postaci: $E - E_F >> kT$) kwantowa funkcja rozkładu może być zastąpiona klasyczną funkcją statystyczną *Maxwella -Boltzmanna*:

$$f(E) = e^{-\frac{E-E_F}{kT}}. \tag{36.4}$$

4. Prąd płynący przez *złącze p–n* dwóch półprzewodników o różnych typach przewodnictwa jest opisany wyrażeniem zawierającym wyraz wykładniczy, w którym występuje iloczyn kT:

$$I = I_s \left(e^{-\frac{eV}{kT}} - 1 \right) \tag{36.5}$$

W powyższym równaniu V oznacza przyłożone do złącza napięcie, e – ładunek elektronu, I_s – prąd wsteczny.

Zasada pomiaru

W ćwiczeniu wykorzystujemy kolejny przykład równania, w którym występuje stała Boltzmanna. Otóż prąd płynący przez *tranzystor* przy zwartym obwodzie baza–kolektor (rys. 36.1) zmienia się z napięciem między bazą a emiterem U_{BE} zgodnie z równaniem:

$$I_k = I_0 e^{\frac{eU_{BE}}{kT}}. \qquad (36.6)$$

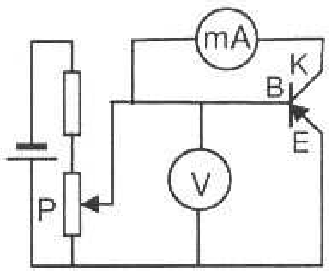
Po zlogarytmowaniu obustronnie powyższego równania otrzymujemy

$$\ln I_k = \ln I_0 + \frac{e}{kT} U_{BE}. \qquad (36.7)$$

Wykres funkcji $\ln I_k = f(U_{BE})$ będzie linią prostą, której współczynnik nachylenia oznaczymy przez a. Jego wartość znajdujemy metodą regresji liniowej. Ten sam współczynnik występuje w równaniu (36.7) jako czynnik stojący przy U_{BE}. Widzimy więc, że $a = e/(kT)$. Znając współczynnik nachylenia i temperaturę, znajdujemy wartość stałej Boltzmanna:

$$k = \frac{e}{aT}. \qquad (36.8)$$

Zależność prądu od napięcia wyznaczamy dla kilku wartości temperatury. W tym celu tranzystor umieszczamy kolejno w naczyniu z wodą o różnej temperaturze. Naczynie powinno być izolowane cieplnie od otoczenia, żeby aktualna temperatura pozostawała stała przez cały czas pomiaru.



Rys. 36.1. Układ do pomiaru charakterystyki zwarciowej tranzystora

Pierwszy pomiar wykonujemy dla mieszaniny wody z lodem, której temperatura wynosi 0°C, a następne pomiary dla wody odpowiednio podgrzanej w innym naczyniu. Po każdorazowym wlaniu wody należy przez kilka minut odczekać na ustalenie się temperatury, której wartość odczytujemy na termometrze.

Przebieg ćwiczenia

1. Połączyć obwód według rys. 36.1. Sporządzić mieszaninę wody z lodem i napełnić naczynie Dewara do około 3/4 pojemności.
2. Potencjometrem P ustawić maksymalne napięcie $U_{BE} \approx 0{,}7$ V.
3. Gdy wskazania termometru się ustalą, wykonać pomiary prądu dla napięć malejących co około 0,02 V do zera i rosnących z powrotem do wartości maksymalnej.
4. Opróżnić naczynie Dewara i napełnić je kolejno wodą o temperaturze około 25°C i 50°C (podgrzaną w innym naczyniu lub z kranu).
5. Dla każdej temperatury wykonać pomiary prądów i napięć jak w punkcie 3.
6. Obliczyć $\ln I_k$.
7. Sporządzić wykres zależności $\ln I_k = f(U_{BE})$ i wyznaczyć współczynnik nachylenia, stosując regresję liniową. Jeżeli część wykresu zmienia nachylenie, stosować regresję tylko do punktów układających się wokół linii prostej.
8. Obliczyć stałą Boltzmanna dla każdej temperatury i wartość średnią.
9. Obliczyć odchylenie standardowe. Jeżeli liczba różnych wartości temperatury była mniejsza niż 10, pomnożyć wynik przez odpowiedni współczynnik Studenta-Fishera.
10. Zaokrąglić błąd i wynik oraz podać postać końcową.

Zestaw ćwiczeniowy

Tranzystor, potencjometr, bateria, naczynie Dewara, miliamperomierz wielozakresowy, termometr

Pojęcia kluczowe

- Stała Boltzmanna, stała gazowa, liczba Avogadra
- Rozkład prędkości drobin, rozkład Fermiego-Diraca, poziom Fermiego, rozkład Maxwella-Boltzmanna
- Zasada pomiaru stałej Boltzmanna, wielkości mierzone, sposób obliczania

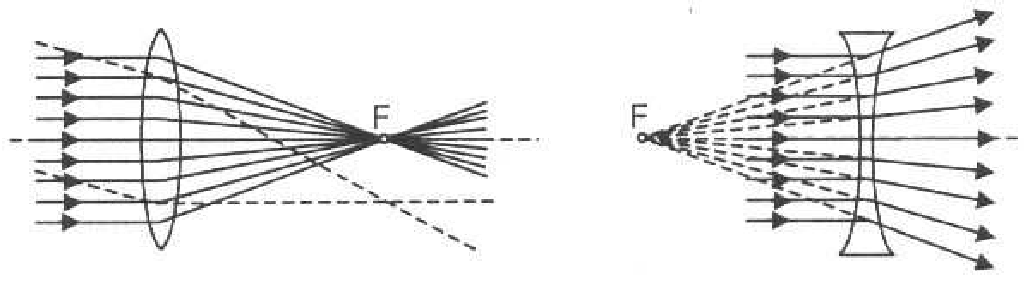
37. Wyznaczanie ogniskowych soczewek ze wzoru soczewkowego oraz metodą Bessela

Wprowadzenie

Soczewką nazywamy ciało przezroczyste ograniczone dwiema powierzchniami sferycznymi. Oś łączącą środki krzywizny obu powierzchni nazywamy *osią optyczną* soczewki. Światło przechodzące przez soczewkę ulega kolejno załamaniu na obu jej powierzchniach (na rysunkach, dla wygody, zaznacza się najczęściej pojedyncze załamanie na tzw. powierzchni środkowej). Promień przechodzący przez *środek optyczny* soczewki nie ulega załamaniu niezależnie od kąta padania na soczewkę – ulega on tylko nieznacznemu przesunięciu równoległemu.

Wiązka promieni biegnąca równolegle do osi optycznej po przejściu przez soczewkę skupia się w jednym punkcie, zwanym *ogniskiem* (rys. 37.1). Odległość ogniska od środka soczewki nazywamy *ogniskową*.

Dobierając odpowiednio promienie krzywizn, buduje się soczewki *skupiające* i *rozpraszające*. Wiązka równoległa padająca na soczewkę rozpraszającą staje



Rys. 37.1. Skupianie promieni w ognisku soczewki skupiającej (po lewej) i rozpraszającej (po prawej)

się po przejściu przez nią wiązką rozbieżną. W tym przypadku ogniskiem jest punkt przecięcia się przedłużeń promieni załamanych.

Położenie ogniska zależy od współczynnika załamania n materiału soczewki względem ośrodka, w którym się znajduje, oraz od *promieni krzywizn* obu powierzchni ograniczających R_1 i R_2. Zależność ogniskowej f od powyższych parametrów jest określona równaniem:

$$\frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right). \tag{37.1}$$

Odwrotność ogniskowej nazywamy *zdolnością skupiającą* soczewki D:

$$D=\frac{1}{f}\ . \tag{37.2}$$

Jednostką zdolności skupiającej jest *dioptria* o wymiarze m^{-1}.

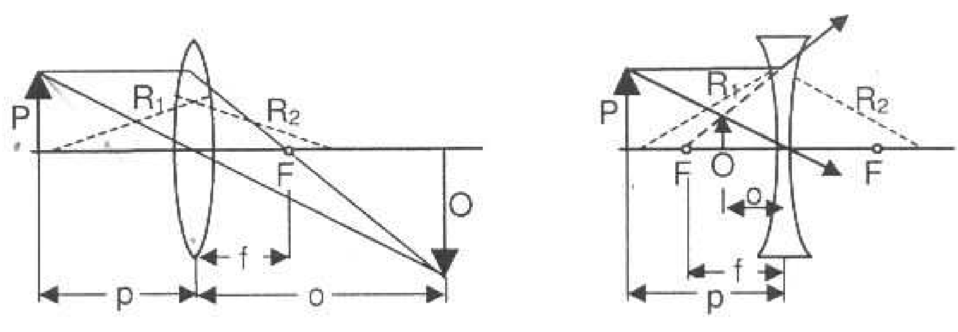
Soczewki mają zdolność odwzorowywania punktów, polegającą na tym, że promienie wybiegające z punktu P, zwanego przedmiotem, zostają skupione po przejściu przez soczewkę w punkcie O, tworząc obraz przedmiotu. Położenie obrazu zależy od położenia przedmiotu oraz od ogniskowej soczewki – jest określone tzw. *równaniem soczewkowym*:

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{o}=\frac{1}{f}, \tag{37.3}$$

gdzie: p jest odległością przedmiotu od soczewki, o – odległością obrazu od soczewki.

Równanie (37.3) może być stosowane, gdy:
- promienie wybiegające z P tworzą niewielki kąt z osią optyczną,
- soczewka jest cienka, tzn. jej grubość jest mała w porównaniu z promieniami krzywizny.

W stosunku do odległości p, o, R_1, R_2 oraz f obowiązuje umowa określająca ich znaki:
- p jest zawsze dodatnie,
- o, R oraz f są dodatnie, gdy leżą po przeciwnej stronie soczewki niż przedmiot,
- o, R i f są ujemne, gdy leżą po tej samej stronie co przedmiot.



Rys. 37.2. Konstrukcja obrazu w soczewce skupiającej (po lewej) i rozpraszającej (po prawej); P – przedmiot, O – obraz, F – ognisko

Obraz w soczewce możemy znaleźć, stosując *konstrukcję geometryczną* przedstawioną na rys. 37.2. W konstrukcji obrazu wykorzystujemy dwa charakterystyczne promienie:

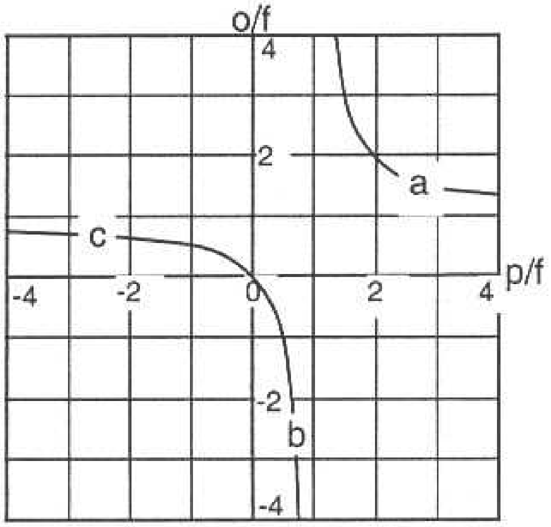
- promień biegnący równolegle do osi optycznej, który po załamaniu przechodzi przez ognisko,
- promień przechodzący przez środek optyczny, nie zmienia on kierunku.

Obraz powstaje w punkcie przecięcia się tych promieni lub ich przedłużeń.

Powiększeniem liniowym nazywamy stosunek wielkości obrazu do wielkości przedmiotu. Jest on także równy stosunkowi odległości o i p

$$m = -\frac{o}{p}. \tag{37.4}$$

Znak „–" został wprowadzony po to, żeby powiększenie było dodatnie, gdy obraz jest prosty, a ujemne, gdy jest odwrócony.



Rys. 37.3. Wykres równania soczewkowego; a – soczewka skupiająca, obraz rzeczywisty odwrócony, b – soczewka skupiająca, obraz urojony prosty, c – soczewka rozpraszająca, obraz urojony prosty

Ilustracją równania (37.3) jest wykres na rys. 37.3 przedstawiający zależność odległości obrazu od odległości przedmiotu od soczewki. Wykres przedstawia hiperbole, których poszczególne części odpowiadają zaznaczonym na rysunku sytuacjom. Z rysunku 37.3 można łatwo znaleźć wszystkie cechy obrazu w zależności od położenia przedmiotu.

Ogniskową układu składającego się z dwóch cienkich soczewek o ogniskowych f_1 i f_2, znajdujących się we wzajemnej odległości d, wyraża wzór:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}. \tag{37.5}$$

Metody znajdowania ogniskowych

Na podstawie wzoru soczewkowego

Odległości p oraz o występujące we wzorze (37.3) są łatwo mierzalne, dzięki czemu wzór ten możemy wykorzystać do wyznaczenia ogniskowej f. Na ławie optycznej umieszczamy świecący przedmiot, soczewkę oraz ekran w taki sposób,

aby na ekranie otrzymać wyraźny obraz przedmiotu. Ekran i oprawka soczewki są umieszczone na wózkach, co umożliwia ich przesuwanie wzdłuż ławy. Wskaźnik wózka przesuwający się względem podziałki naniesionej na ławie wyznacza dokładnie położenie wózka lub soczewki.

Jeżeli wózek soczewki nie ma wskaźnika lub wskaźnik jest przesunięty względem środka soczewki, to:

- odczytujemy położenie a_1 dowolnej krawędzi wózka,
- następnie obracamy wózek lub oprawę soczewki o 180° i odczytujemy położenie a_2 tego samego co poprzednio punktu wózka,
- obliczamy rzeczywiste położenie a soczewki jako średnią arytmetyczną obu położeń.

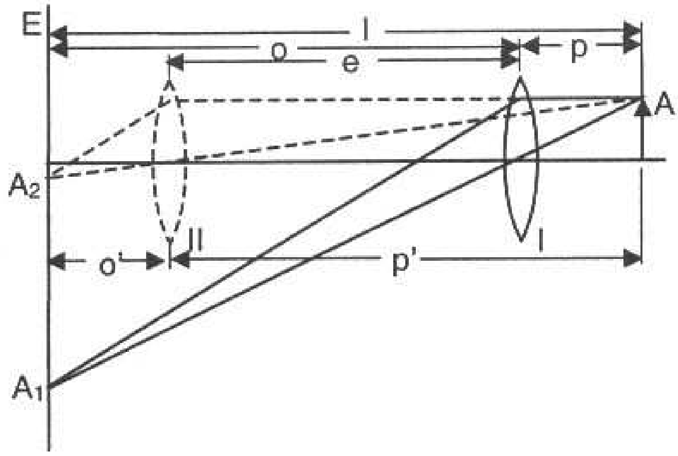
Ponieważ oszacowanie ostrości obrazu jest połączone z dużą niepewnością, ustawienie wózka powtarzamy kilkakrotnie, notujemy za każdym razem położenie wskaźnika, po czym obliczamy wartość średnią.

Znając odpowiednie położenia, obliczamy odległość obrazu i przedmiotu od soczewki, a następnie z równania (37.3) znajdujemy ogniskową.

Opisana metoda nie może być stosowana bezpośrednio do *soczewek rozpraszających*, gdyż nie dają one obrazu rzeczywistego. Możemy jednak obliczyć ogniskową układu złożonego z badanej soczewki rozpraszającej i soczewki skupiającej. Mając ogniskową układu f oraz ogniskową f_s soczewki skupiającej, znajdujemy ogniskową f_r soczewki rozpraszającej z równania (37.5). Stosując tę metodę, należy pamiętać, że obraz rzeczywisty uzyskamy wtedy, gdy będzie spełniony warunek $|f_s| < |f_r|$, oraz że ogniskowa soczewki rozpraszającej jest ujemna.

Metoda Bessela

Odległości obrazu i przedmiotu występują w równaniu (37.3) w postaci symetrycznej – oznacza to, że po zamianie ich wartości równanie pozostaje w dalszym



Rys. 37.4. Ilustracja metody Bessela wyznaczania ogniskowej soczewki

ciągu prawdziwe. Fizyczną konsekwencją symetrii równania soczewkowego jest możliwość uzyskania ostrego obrazu przy dwóch położeniach soczewki względem przedmiotu.

Przy stałej odległości l przedmiotu od ekranu obraz powstaje w odległości o oraz $o' = p$ od soczewki (rys. 37.4). W jednym położeniu obraz jest pomniejszony, a w drugim powiększony w stosunku do przedmiotu.

Na podstawie rys. 37.4 i powyższego akapitu możemy napisać układ równań:

$$o + p = l,$$

$$o - p = e.$$

Wyliczamy z nich p oraz o i następnie wstawiamy uzyskane wartości do równania (37.3). Po prostych przekształceniach otrzymujemy:

$$f = \frac{l^2 - e^2}{4l}. \qquad (37.6)$$

Aby wyznaczyć ogniskową soczewki lub układu soczewek z równania (37.6), należy zmierzyć odległość przedmiotu od ekranu l oraz odległość e między dwoma położeniami soczewki, przy których obraz na ekranie jest ostry. Szukając odległości e, nie musimy dbać o dokładne określenie położenia soczewki, ponieważ różnica położeń soczewki jest równa różnicy położeń dowolnego wskaźnika związanego z wózkiem. Pomiarów dokonujemy dla kilku położeń ekranu.

Przebieg ćwiczenia

1. Umieścić badaną soczewkę w uchwycie ruchomego wózka.
2. Dobierając położenie soczewki, doprowadzić do uzyskania ostrego obrazu na ekranie.
3. Wyznaczyć odległość przedmiotu i obrazu od soczewki dla kilku położeń ekranu. Pomiary wykonać dla soczewek skupiających i układu: soczewka skupiająca + soczewka rozpraszająca.
4. Dla każdego położenia ekranu obliczyć ogniskową ze wzoru soczewkowego, a następnie wartości średnie oraz odchylenie standardowe dla każdej z soczewek.
5. Dla tych samych soczewek zastosować metodę Bessela. Zmierzyć odległości l oraz e dla różnych położeń ekranu.
6. Obliczyć ogniskowe soczewek skupiających i układu ze wzoru (37.6) oraz ogniskową soczewki rozpraszającej z równania (37.5).
7. Obliczyć wartości średnie i odchylenie standardowe dla każdej soczewki.
8. Zaokrąglić obliczone wartości i zestawić wyniki w postaci ostatecznej.

Zestaw ćwiczeniowy

Ława optyczna, świecący obraz, soczewki w uchwytach, ekran

Pojęcia kluczowe

- Soczewki grube i cienkie, oś optyczna, środek optyczny soczewki
- Załamanie światła w soczewkach, ognisko, ogniskowa, zdolność skupiająca
- Dioptria, równanie soczewkowe, warunki stosowania równania soczewkowego, znaki wielkości występujących w równaniu soczewkowym
- Konstrukcja obrazu, powiększenie
- Metoda Bessela
- Wielkości do zmierzenia i obliczenia

38. Wyznaczanie współczynnika załamania światła metodą najmniejszego odchylenia w pryzmacie

Wprowadzenie

Załamanie światła na powierzchni rozgraniczającej dwa ośrodki jest opisane *prawem Snella*:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n\,, \tag{38.1}$$

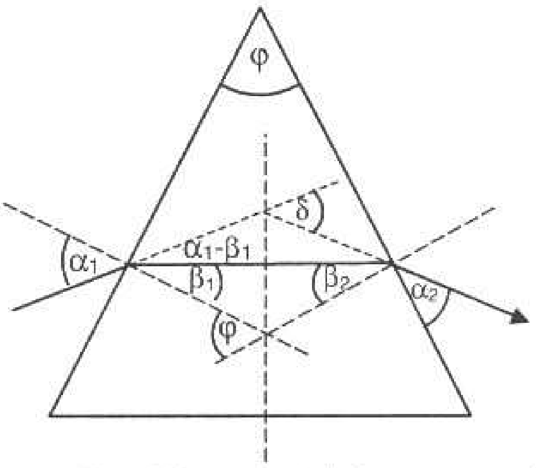
gdzie: α – *kąt padania* światła na granicę ośrodków, β – *kąt załamania*, n – *współczynnik załamania* światła ośrodka drugiego względem pierwszego.

Gdy pierwszy z ośrodków jest próżnią, równanie (38.1) definiuje *bezwzględny* współczynnik załamania, w innych przypadkach – współczynnik *względny*.

Prawa Snella w postaci (38.1) nie używa się do praktycznego wyznaczania współczynnika załamania ze względu na niedogodności i niedokładności wyznaczania kątów padania i załamania, natomiast możemy je skutecznie zastosować do pryzmatu, w którym kąty α i β można wyrazić przez inne, dogodne do pomiaru wielkości.

W ćwiczeniu wykorzystujemy tylko dwie płaszczyzny pryzmatu (rys. 38.1), tworzące ze sobą kąt φ, zwany *kątem łamiącym*. Promień świetlny padający na pryzmat ulega dwukrotnemu załamaniu i zostaje odchylony o pewien kąt δ zależny od kąta padania α oraz od kąta łamiącego φ. Na podstawie rysunku *kąt odchylenia* możemy wyrazić następująco:

$$\delta = \alpha_1 - \beta_1 + \alpha_2 - \beta_2\,. \tag{38.2}$$



Rys. 38.1. Załamanie światła w pryzmacie

Symulacja komputerowa zjawisk w pryzmacie jest do pobrania z Internetu - www.phys.put.poznan.pl .

Zobaczysz i zrozumiesz załamanie, odbicie, rozszczepienie, odchylenie minimalne.

Możesz wybierać kształt pryzmatu, długość fali, współczynnik załamania.

Możesz także wykonać obliczenia potrzebne w ćwiczeniu.

Poćwicz symulacje przed przystąpieniem do ćwiczenia.

Kąt padania można tak dobrać, aby promień biegnący wewnątrz pryzmatu był prostopadły do dwusiecznej kąta łamiącego φ. W tej sytuacji bieg promienia jest symetryczny, tzn. $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ oraz $\beta_1 = \beta_2 = \beta$, a *kąt odchylenia – najmniejszy* z możliwych dla danego pryzmatu $\delta = \delta_{min}$. Biorąc ponadto pod uwagę, że $2\beta = \varphi$, możemy przekształcić równanie (38.2) do postaci:

$$\alpha = \frac{\delta_{min} + \varphi}{2} . \tag{38.3}$$

Po podstawieniu wyrażonych powyżej wartości α i β do wzoru (38.1) definiującego współczynnik załamania otrzymamy:

$$n = \frac{\sin\frac{1}{2}(\delta_{min} + \varphi)}{\sin\frac{\varphi}{2}} . \tag{38.4}$$

Stosując powyższy wzór, możemy wyznaczyć n na podstawie pomiarów kąta łamiącego i kąta najmniejszego odchylenia.

Pomiary

Pomiaru kątów dokonujemy, używając stolika spektrometrycznego.

Pomiar kąta łamiącego

Ustawiamy pryzmat na stoliku w taki sposób, żeby dwusieczna kąta łamiącego była w przybliżeniu równoległa do światła padającego na pryzmat (rys. 38.2). Jedna część wiązki ulega odbiciu na lewo, a druga na prawo od kierunku pierwotnego biegu. Z rysunku 38.2 widzimy, że $\varphi = \alpha_1 + \alpha_2$ oraz $\varepsilon = 2(\alpha_1 + \alpha_2)$, skąd

$$\varphi = \frac{\varepsilon}{2} . \tag{38.5}$$

Kierunki promieni odbitych mierzymy przez naprowadzenie lunetki kolejno na kierunek promienia lewego (l) i prawego (p) oraz odczyt jej położenia na podziałce kątowej spektrometru. Po wyrażeniu kąta ε przez odpowiednie położenia lunetki (α_l i α_p) przekształcamy wzór (38.5) do postaci:

$$\varphi = \frac{|\alpha_l - \alpha_p|}{2} . \tag{38.6}$$

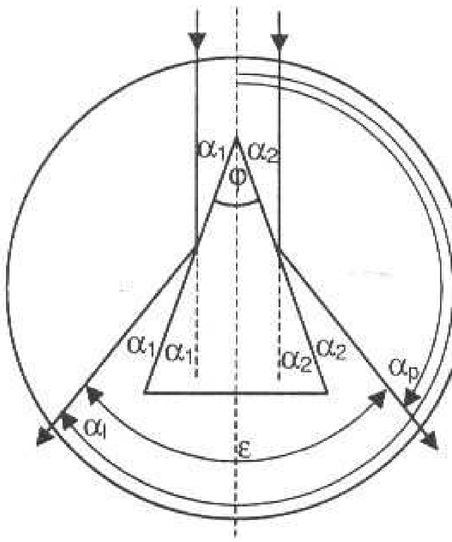
Z powyższej postaci można korzystać wtedy, gdy zerowa wartość skali spektrometru znajduje się poza obszarem wyznaczonym przez kąt ε. W przeciwnym wypadku należy go nieco zmodyfikować. Uwaga ta dotyczy wszystkich pomiarów kątów.

PRZYKŁAD

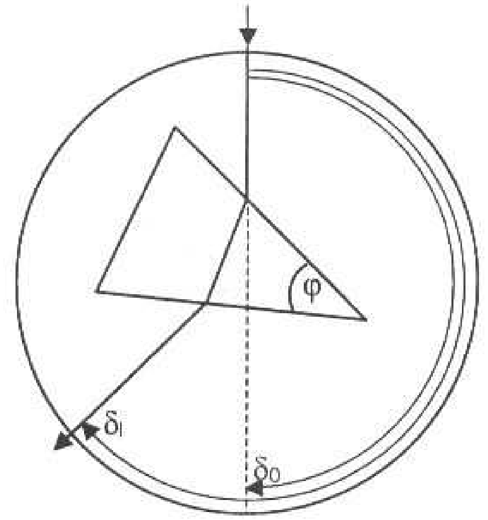
Przypuśćmy, że uzyskano wyniki: $\alpha_l = 30°$ i $\alpha_p = 310°$, a dla promienia nieodchylonego $\alpha_0 = 350°$. Bezpośrednie zastosowanie wzoru (38.6) dałoby fałszywą wartość $\varphi = 140°$, ponieważ nie została uwzględniona nieciągłość skali w zakresie mierzonych kątów. Dla zachowania ciągłości skali należy kąt α_l wyrazić jako $360° + 30°$. Zastosowanie wzoru (38.6) po takiej modyfikacji daje poprawną wartość $\varphi = 40°$.

Pomiar kąta najmniejszego odchylenia

Ustawiamy na stoliku pryzmat w sposób przedstawiony na rys. 38.3 i znajdujemy w lunetce promień załamany. Obracając powoli stolikiem, obserwujemy jego ruch. Staramy się wykonać taki obrót stolika, aby kąt odchylenia malał. Przy ciągłym obrocie stolika w jedną stronę można zauważyć, że obraz źródła światła (jasny prążek) przybliża się do pewnej granicznej pozycji, a następnie się od niej od-



Rys. 38.2. Wyznaczanie kąta łamiącego pryzmatu



Rys. 38.3. Wyznaczanie kąta odchylenia promienia świetlnego przez pryzmat

dala. To zwrotne położenie obrazu szczeliny odpowiada minimalnemu odchyleniu biegu promienia. Po dokładnym ustawieniu stolika w położeniu odpowiadającym zmianie kierunku ruchu obrazu szczeliny naprowadzamy na ten obraz krzyż z nici pajęczych i odczytujemy kąt δ_l. Następnie zdejmujemy pryzmat ze stolika i obserwujemy położenie wiązki nieodchylonej δ_0. Kąt najmniejszego odchylenia jest różnicą obu położeń:

$$\delta_{\min} = |\delta_l - \delta_0| . \tag{38.7}$$

Kąt najmniejszego odchylenia mierzymy również dla drugiego położenia pryzmatu na stoliku – symetrycznego względem kierunku promienia padającego. Promień odchylony obserwujemy wówczas oczywiście po prawej stronie – w położeniu δ_p, a kąt odchylenia minimalnego

$$\delta_{\min} = |\delta_0 - \delta_p| . \tag{38.8}$$

Można również wyznaczyć kąt najmniejszego odchylenia bez pomiaru promienia nieodchylonego, ze wzorów (38.7) i (38.8) wynika bowiem, że

$$\delta_{\min} = \frac{|\delta_l - \delta_p|}{2} . \tag{38.9}$$

Wyznaczanie dyspersji

Współczynnik załamania zależy od długości fali świetlnej. Zależność tę można wyznaczyć, używając w opisanej wyżej metodzie światła o różnych długościach fal. W niniejszym ćwiczeniu stosuje się światło białe przechodzące przez odpowiednie filtry, które wydzielają z niego wąski przedział długości fal.

Barwa światła nie wpływa na wartość kąta łamiącego φ i dlatego pomiaru tej wielkości dokonujemy z użyciem światła o dowolnej długości fali, najlepiej światła białego ze względu na dużą jasność obrazu szczeliny.

Kąt najmniejszego odchylenia zależy od długości fali i dlatego należy dokonać pomiarów z użyciem filtrów barwnych. Dla każdej długości fali znajdujemy wartość współczynnika załamania i następnie wyznaczamy zależność $n = f(\lambda)$, czyli *zależność dyspersyjną*.

Przebieg ćwiczenia

1. Ustawić pryzmat na stoliku spektrometrycznym w taki sposób, aby gołym okiem można było obserwować obraz szczeliny odbity od dwóch płaszczyzn pryzmatu.
2. Naprowadzić skrzyżowanie nici pajęczych lunetki na środek obrazu szczeliny. Odczytać położenia α_p i α_l na podziałce kątowej. Dokładne ustawienie lunetki uzyskujemy za pomocą tzw. *leniwki* po uprzednim zablokowaniu przesuwu

ręcznego. Uwaga: pokonywanie oporu śruby blokującej prowadzi do uszkodzenia spektrometru.

3. Zdjąć pryzmat ze stolika i odczytać położenie lunetki nastawionej na nieodchylony obraz szczeliny.
4. Ustawić pryzmat na stoliku według rys. 38.3 i znaleźć, najpierw gołym okiem, a następnie lunetką, obraz promienia załamanego.
5. Obracając stolikiem pryzmatu, doprowadzić do położenia, w którym kąt odchylenia ma wartość minimalną.
6. Odczytać na skali kątowej położenia lunetki odpowiadające kątom minimalnego odchylenia dla długości fal z zakresu 400–700 nm dla dwóch położeń pryzmatu dających odchylenie w lewo i w prawo.
7. Obliczyć współczynnik załamania dla wszystkich długości fal na podstawie równania (38.4).
8. Wykreślić krzywą dyspersji.
9. Obliczyć błąd kąta łamiącego oraz minimalnego odchylenia, stosując metodę różniczki zupełnej odpowiednio do równania (38.6) lub jednego z równań (38.7–38.9). Wszystkie kąty i ich błędy należy wyrażać w radianach.
11. Obliczyć błędy współczynnika załamania dla każdej długości fali, stosując metodę różniczki zupełnej do równania (38.4) i wykorzystując wartości obliczone w poprzednim punkcie.
12. Na wykresie nanieść prostokąty błędów.

Zestaw ćwiczeniowy

Źródło światła, spektrometr, komplet filtrów, pryzmaty

Pojęcia kluczowe

- Prawo załamania światła, współczynnik załamania, dyspersja (rozdz. 44)
- Pryzmat, kąt łamiący, załamanie światła w pryzmacie, kąt odchylenia, odchylenie minimalne
- Pomiary kątów łamiącego i odchylenia

39. Wyznaczanie współczynnika załamania światła z pomiaru pozornej i rzeczywistej grubości płytek

Wprowadzenie

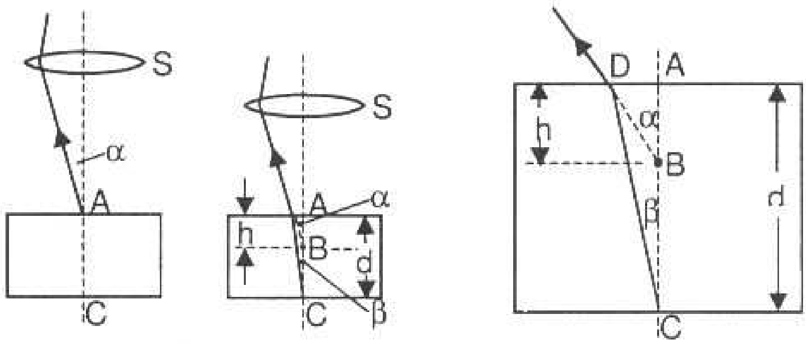
Światło, które po drodze do naszego oka przechodzi przez jedną lub więcej powierzchni załamujących, ma na ogół inny kierunek, niż gdyby biegło po linii pro-

stej w ośrodku jednorodnym. Z tego powodu obserwator odnosi wrażenie, że światło wychodzi z innego źródła, niż to jest w rzeczywistości. Obserwowane źródło jest obrazem źródła rzeczywistego lub *źródłem pozornym*.

Spoglądając na przedmioty leżące na dnie naczynia z wodą, wydaje się nam, że leżą one bliżej powierzchni niż w rzeczywistości. Przeciwnie, nurek spoglądający w górę na, powiedzmy, zwisającą gałąź drzewa będzie sądzić, że jest ona wyżej niż w rzeczywistości. W obu przypadkach mamy do czynienia z pozorną zmianą odległości wynikającą z załamania światła na granicy dwóch ośrodków.

Podstawa fizyczna metody

Przykład zjawiska, w którym występuje pozorna zmiana grubości, a także zasadę pomiaru tej grubości pokazano na rys. 39.1. W lewej części rysunku widzimy soczewkę *S* (może nią być okular mikroskopu) ustawioną w taki sposób, że w ustalonym miejscu, niewidocznym na rysunku, powstaje ostry obraz punktu *A* znajdującego się na górnej powierzchni płytki.



Rys. 39.1. Położenie obiektywu mikroskopu (*S*) względem płytki w celu obserwacji jej górnej (po lewej) i dolnej (w środku) powierzchni oraz powiększenie fragmentu rysunku środkowego (po prawej)

Chcąc uzyskać ostry obraz punktu *C* znajdującego się na dolnej powierzchni płytki (rysunek środkowy), musimy całą płytkę przesunąć ku górze o odległość *h*. W tym położeniu promień wybiegający z punktu *C* „jest widziany" przez soczewkę, jakby wychodził z punktu *B*. W tym samym miejscu co poprzednio powstaje obraz pozornego źródła *B*, czyli rzeczywistego źródła *C*.

Według *prawa załamania* światła stosunek sinusów kąta padania α i kąta załamania β jest dla danej pary ośrodków wielkością stałą, równą stosunkowi bezwzględnych współczynników załamania obu ośrodków.

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n_2}{n_1}. \tag{39.1}$$

Wartość *bezwzględnego współczynnika załamania* otrzymujemy z równania (39.1), gdy jednym z ośrodków jest próżnia ($n_1 = 1$). Prawo załamania świa-

tła na granicy próżnia–ośrodek, a także w przybliżeniu na granicy powietrze–ośrodek przyjmuje wtedy postać:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n\,, \tag{39.2}$$

gdzie n oznacza bezwzględny współczynnik załamania dowolnego ośrodka.

W celu obliczenia pozornej grubości h zakładamy, że promienie biegnące w płytce tworzą bardzo mały kąt z prostopadłą padania. W tej sytuacji sinus kąta ma prawie taką samą wartość jak tangens, co możemy wyrazić matematycznie:

$$\sin\alpha \approx \frac{AD}{h}, \qquad \sin\beta \approx \frac{AD}{d}. \tag{39.3}$$

Po wstawieniu powyższych wartości do równania (39.2) otrzymujemy związek między *grubością pozorną* h i *rzeczywistą* d:

$$n = \frac{d}{h}. \tag{39.4}$$

Powyższy związek pozwala na obliczenie współczynnika załamania na podstawie pomiarów d i h.

Pomiary

Grubość rzeczywistą mierzymy mikromierzem, grubość pozorną natomiast za pomocą mikroskopu. Na górnej i dolnej powierzchni badanej płytki znajdują się rysy. Nastawiamy mikroskop na ostrość widzenia rysy górnej, a następnie dolnej. Regulację ostrości wykonujemy, przesuwając pionowo część ruchomą mikroskopu, zwaną tubusem. Jeżeli oznaczymy położenia tubusu w obu przypadkach odpowiednio przez a_g i a_d, to pozorna grubość płytki $h = a_d - a_g$.

Stosowany mikroskop musi mieć możliwość pomiaru przesunięcia tubusu lub stolika. Większość mikroskopów ma skalowane obroty pokrętła precyzyjnego przesuwu tubusu. Pokrętło przesuwu zgrubnego nie jest najczęściej wyskalowane i dlatego cały ruch od położenia górnego do dolnego lub na odwrót musi być wykonany za pomocą pokrętła precyzyjnego. Ze względu na ograniczony zakres przesuwu tym pokrętłem należy je obrócić do położenia prawie krańcowego, np. dolnego, po czym ustawić ostrość widzenia rysy dolnej pokrętłem zgrubnym (ewentualnie doregulować precyzyjnym). Nie ruszając od tej chwili pokrętła zgrubnego, za pomocą precyzyjnego doprowadzamy do ostrego widzenia rysy górnej. Obliczając przesuw tubusu, uwzględniamy liczbę pełnych obrotów oraz różnicę wskazań pokrętła.

Przebieg ćwiczenia

1. Zmierzyć grubość płytki.
2. Ustawić płytkę na stoliku mikroskopu.
3. Znaleźć położenie tubusu mikroskopu a_d, przy którym widać wyraźnie rysę dolną, a następnie położenie a_g, przy którym powstaje wyraźny obraz rysy górnej.
4. W razie potrzeby powtarzać pomiar, każdorazowo „psując" obraz i szukając na nowo właściwego położenia tubusu.
5. Obliczyć wartości średnie grubości rzeczywistej i pozornej oraz odchylenia standardowe.
6. Obliczyć współczynnik załamania.
7. Obliczyć błąd metodą różniczki logarytmicznej lub zupełnej.
8. Zaokrąglić obliczone wartości.
9. Przedstawić ostateczną postać wyniku.

Zestaw ćwiczeniowy

Badane płytki, mikromierz (rozdz. 2.1), mikroskop

Pojęcia kluczowe

- Prawo załamania światła, współczynnik załamania światła (patrz także rozdz. 38 i 40)
- Przejście światła przez płytkę równoległościenną
- Bieg promieni od górnej i dolnej powierzchni do obiektywu, obserwacja płytki przez mikroskop, grubość rzeczywista i pozorna
- Wyrażenie współczynnika załamania przez grubość rzeczywistą i pozorną, sposób pomiaru grubości rzeczywistej i pozornej.

40. Wyznaczanie współczynnika załamania światła dla cieczy za pomocą refraktometru Abbego

Wprowadzenie

Gdy promień świetlny biegnie z ośrodka optycznie rzadszego do optycznie gęstszego, np. z powietrza do szkła, ulega on załamaniu na granicy ośrodków, tworząc w ośrodku gęstszym mniejszy kąt z normalną do powierzchni (*kąt załamania*) niż w ośrodku rzadszym (odpowiedni kąt nosi nazwę *kąta padania*).

W przypadku odwrotnego biegu promieni kąt padania jest mniejszy od kąta załamania.

Każdemu kątowi padania α odpowiada inny kąt załamania β, lecz stosunek sinusów obu kątów ma wartość stałą dla danej pary ośrodków i dla danej długości fali światła. Wyraża się to ilościowo następującym równaniem:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (40.1)$$

Powyższy wzór wyraża *prawo załamania światła* (*prawo Snella*), a wielkości n_1 i n_2 nazywają się *bezwzględnymi współczynnikami załamania* światła ośrodka 1 i ośrodka 2.

Bezwzględny współczynnik załamania światła jest określony również stosunkiem prędkości światła w próżni c do prędkości światła w danym ośrodku v:

$$n = \frac{c}{v}. \quad (40.2)$$

Ze względu na to, że prędkość światła jest największa w próżni, bezwzględny współczynnik załamania światła jest dla wszystkich ośrodków materialnych większy od jedności.

Załamanie światła na granicy dwóch ośrodków materialnych jest określone ich *względnym współczynnikiem załamania*:

$$n_{21} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (40.3)$$

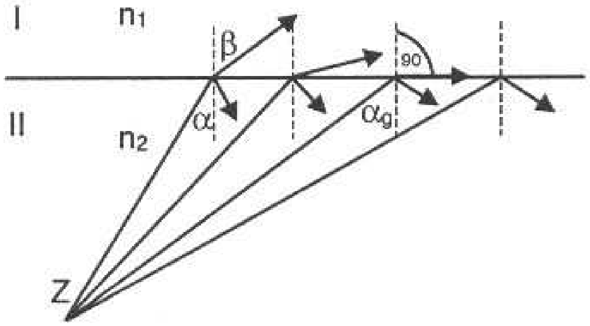
W rzeczywistych warunkach załamanie światła następuje często na granicy powietrza z cieczą lub ciałem stałym. W tej sytuacji można przyjąć, że powietrze ma współczynnik załamania bardzo bliski wartości dla próżni ($n = 1$) i że równanie (40.1) wyznacza bezwzględny współczynnik załamania cieczy lub gazu.

Całkowite odbicie wewnętrzne

Wzór Snella przyjmuje szczególnie wygodną postać w przypadku *całkowitego odbicia wewnętrznego* zachodzącego przy *kącie granicznym* lub *większym*. Istotę zjawiska całkowitego odbicia wewnętrznego pokazano na rys. 40.1. Promienie biegnące z ośrodka optycznie gęstszego II do rzadszego odchylają się od prostopadłej tym bardziej, im większy jest kąt padania α. Kąt załamania osiąga wartość 90° przy pewnym kącie α_g, zwanym kątem granicznym – promień nie przechodzi do ośrodka I. Widzimy więc, że przy kącie granicznym i większych kątach padania promienie nie mogą przejść do ośrodka rzadszego – ulegają całkowitemu odbiciu. Zgodnie z prawem załamania

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\sin \alpha_g}{\sin 90^0} = \sin \alpha_g . \tag{40.4}$$

Jeśli znamy współczynnik załamania n_2 ośrodka gęstszego i zmierzymy kąt graniczny α_g, możemy wyznaczyć współczynnik załamania n_1 ośrodka rzadszego. Pomiaru kąta granicznego dokonujemy za pomocą refraktometru.

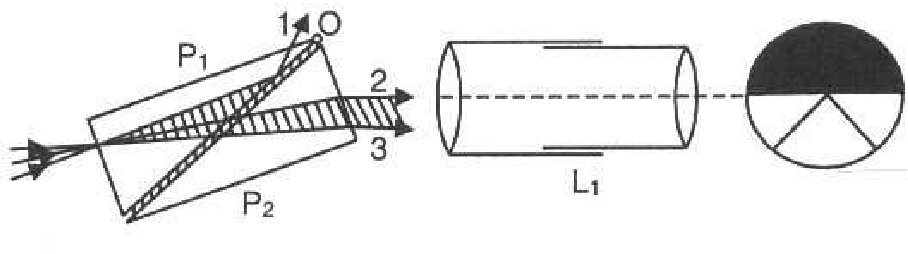


Rys. 40.1. Ilustracja całkowitego odbicia wewnętrznego

Dla promieni biegnących z ośrodka rzadszego do gęstszego całkowite odbicie nie występuje.

Budowa refraktometru Abbego

Zasadniczą częścią refraktometru Abbego są dwa prostokątne pryzmaty P_1 i P_2 (rys. 40.2) ze szkła flintowego o dużym współczynniku załamania.



Rys. 40.2. Zasada pomiaru za pomocą refraktometru Abbego

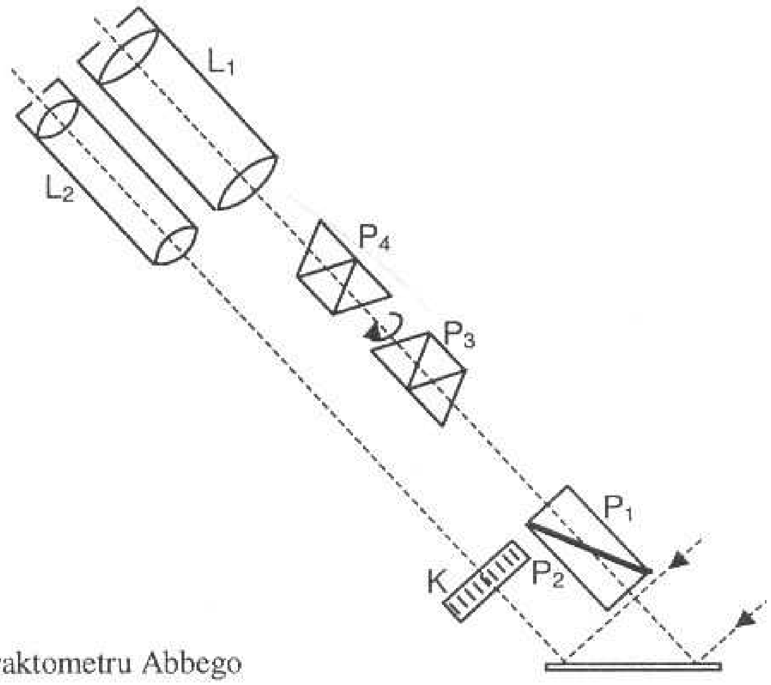
Pryzmat P_1 można odchylać, obracając go wokół osi O. Po odchyleniu na powierzchni przeciwprostokątnej pryzmatu P_2 umieszczamy kilka kropli badanej cieczy, która po dociśnięciu pryzmatów tworzy cienką płasko-równoległą warstwę.

Na pryzmat P_1 pada rozbieżna wiązka światła z dowolnego źródła, po czym dochodzi pod różnymi kątami padania do przeciwprostokątnej, napotykając ośrodek o mniejszym współczynniku załamania, jakim jest badana ciecz między pryzmatami. Granica między pryzmatem P_1 a cieczą stanowi powierzchnię, na której może nastąpić całkowite odbicie wewnętrzne – dla pewnych kątów padania nastąpi, a dla innych nie.

Przypuśćmy, że promień 2 na rys. 40.2 pada pod kątem minimalnie mniejszym od granicznego; wówczas promienie powyżej promienia 2 ulegną całkowitemu odbiciu wewnętrznemu, natomiast promienie między 2 i 3 przejdą do drugiego pryzmatu P_2, a następnie do lunetki L_1. Promienie, które padają na pryzmat P_1 w innych miejscach, tworzą wiązkę wychodzącą z P_2 zawartą całkowicie między zaznaczonymi promieniami 2 i 3.

Przy opisanym biegu promieni w polu widzenia lunetki zauważymy obszar jasny (od promienia 2 w dół) oraz obszar ciemny (powyżej promienia 2). Położenie granicy obszaru jasnego i ciemnego zależy od wartości współczynnika załamania cieczy. Granica ta jest naprowadzana na środek pola widzenia nieruchomej lunetki przez obrót pryzmatów P_1P_2.

Uniwersalny refraktometr Abbego, którym się posługujemy w ćwiczeniu, stanowi konstrukcję bardziej rozwiniętą (patrz rys. 40.3), dzięki czemu pozwala na używanie światła białego oraz bezpośrednie odczytywanie wartości współczynnika załamania.



Rys. 40.3. Budowa refraktometru Abbego

Z obrotem pryzmatów P_1 i P_2 jest sprzężony ruch podziałki K sporządzonej na podstawie równania (40.1) w taki sposób, że odczytuje się z niej wprost współczynnik załamania. Odczytu dokonujemy za pomocą lunetki L_2, przez którą widzimy dwie podziałki: jedną podającą wartość współczynnika załamania oraz drugą podającą procentową zawartość cukru w roztworze wodnym. Tej ostatniej używa się tylko do wyznaczania zawartości cukru. W niektórych konstrukcjach refraktometr ma tylko jedną lunetkę – oglądamy przez nią zarówno obraz, jak i skalę.

W pryzmatach refraktometru, jak również w badanej cieczy występuje zjawisko *dyspersji*, w wyniku którego światło białe zostaje rozszczepione. Na skutek tego linia rozgraniczająca pole widzenia nie jest ostra, lecz barwna i rozmyta. W refraktometrze Abbego rozszczepienie jest skompensowane przez układ dwóch pryzmatów P_3 i P_4. Każdy z nich składa się z kilku, przeważnie trzech, pojedynczych pryzmatów wykonanych z różnych gatunków szkła, różniących się współczynnikami załamania. Kąty łamiące tych pryzmatów są tak dobrane, że światło żółtej linii sodu nie ulega żadnemu odchyleniu. Odchyleniu w przeciwnych kierunkach ulegają promienie czerwony i fioletowy. Pryzmat daje widmo widziane na wprost i z tego powodu nazywa się *à vision direct*. Rozszczepienie światła powodowane przez dwa identyczne pryzmaty zależy od ich wzajemnego ustawienia. Gdy są one ustawione równolegle, rozszczepienia powodowane przez każdy z nich sumują się, natomiast gdy jeden z nich jest obrócony o 180° wokół osi optycznej, rozszczepienie zostanie zlikwidowane – światło za drugim pryzmatem jest białe. Dla innych ustawień pryzmatów P_3 i P_4 mamy przypadki pośrednie. W refraktometrze układ ten służy do skompensowania dyspersji wywołanej przez badaną ciecz.

Przebieg ćwiczenia

1. Włączyć lampę stołową i zwierciadłami oświetlić pole widzenia obu lunetek.
2. Ustawić ostrość widzenia nici pajęczych i skali w lunetkach.
3. Odchylić pryzmat P_1, sprawdzić, czy jego powierzchnia jest sucha i czysta, po czym nałożyć na nią za pomocą pipety kilka kropel badanego roztworu i docisnąć pryzmat.
4. Pokrętłem pryzmatów P_1P_2 naprowadzić na środek widzenia lunetki granicę pola jasnego i ciemnego. Skompensować rozszczepienie barwne.
5. W lunetce L_1 odczytać wartość współczynnika załamania cieczy.
6. Powtórzyć pomiar współczynnika załamania dla roztworów o różnych stężeniach. Przed użyciem nowego roztworu przetrzeć powierzchnie pryzmatów miękką szmatką zwilżoną wodą i osuszyć suszarką.
7. Wykonać wykres zależności współczynnika załamania od stężenia roztworu.
8. Dla jednego z roztworów zmierzyć współczynnik załamania w funkcji temperatury. Do regulacji temperatury używa się ultratermostatu połączonego z refraktometrem.
9. Wykonać wykres $n = f(T)$.
10. Na wykresach nanieść prostokąty błędów.

Zestaw ćwiczeniowy

Refraktometr Abbego, lampa stołowa, badane roztwory, pipety, szmatka

Pojęcia kluczowe

- Kąt padania, załamania i odbicia, prawo załamania światła, bezwzględny i względny współczynnik załamania
- Całkowite odbicie wewnętrzne
- Budowa refraktometru Abbego, bieg promieni przez układ pryzmaty + ciecz
- Dyspersja, kompensacja dyspersji

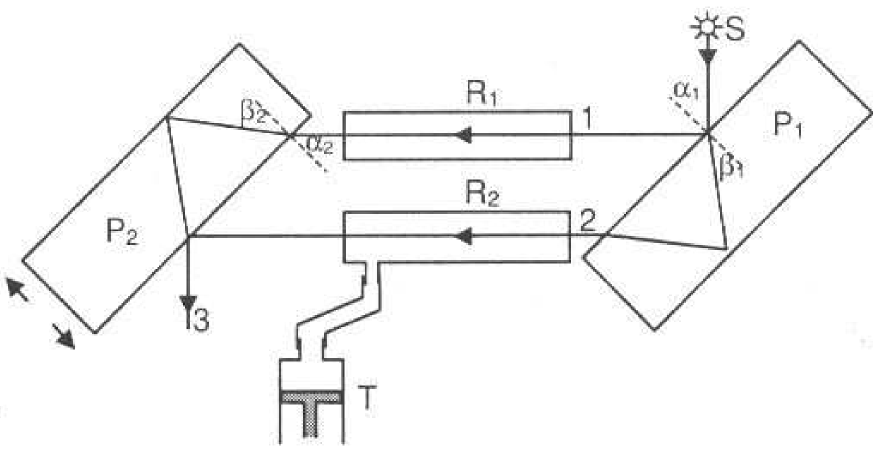
41. Wyznaczanie współczynnika załamania światła w powietrzu w zależności od ciśnienia za pomocą interferometru Jamina

Wprowadzenie

Współczynnik załamania gazów różni się bardzo mało od jedności – jego wartość przy normalnym ciśnieniu, w zależności od rodzaju gazu, zawiera się w zakresie 1,0001–1,001. Rozróżnienie wartości w tym zakresie wymaga ogromnej dokładności pomiarów, którą mogą zapewnić tylko metody interferencyjne.

Interferometr Jamina

Jednym z przyrządów pozwalających zmierzyć bardzo małe zmiany współczynnika załamania jest *interferometr Jamina*, którego schemat budowy przedstawiono na rys. 41.1. Interferometr składa się z dwóch grubych, płasko-równoległych płytek szklanych P_1 i P_2 jednakowej grubości d.



Rys. 41.1. Schemat budowy interferometru Jamina; P_1, P_2 – płytki płasko-równoległe, R_1, R_2 – rurki z badanym gazem, T – pompka z tłokiem

Symulacja komputerowa zjawisk w interferometrze jest do pobrania z Internetu - www.phys.put.poznan.pl.
Zobaczysz i zrozumiesz budowę, bieg promieni, powstawanie różnicy dróg, działanie kompensatora i in.
Możesz sam zmieniać ciśnienie, obracać kompensatorem i obserwować obraz interferencyjny.
Możesz także wykonać obliczenia potrzebne w ćwiczeniu.
Poćwicz symulacje przed przystąpieniem do ćwiczenia.

Rozpatrzmy przejście pojedynczego promienia przez ten układ. Promień wychodzący ze źródła światła S pada na powierzchnię płytki P_1, częściowo odbija się od niej, częściowo zaś załamuje i następnie odbija się od tylnej ścianki. W rezultacie powstają dwa promienie 1 i 2. Promienie te padają z kolei na drugą płytkę i tu znowu odbijają się częściowo od powierzchni przedniej, a częściowo od tylnej. Promień 3 jest wynikiem nałożenia się promienia 1 odbitego od tylnej i promienia 2 odbitego od przedniej powierzchni płytki P_2. Dla przejrzystości rysunku nie uwzględniono na nim promienia 1 odbitego od ścianki przedniej, a także promienia 2 odbitego od powierzchni tylnej, gdyż te promienie nie interferują ze sobą ze względu na znaczne oddalenie.

W dalszych rozważaniach będziemy używali pojęcia *drogi optycznej* światła, którą definiuje się jako iloczyn drogi geometrycznej i współczynnika załamania. W wyniku odbić od płytki P_1 pomiędzy promieniami 1 i 2 powstaje różnica dróg optycznych Δ_1

$$\Delta_1 = 2dn\cos\beta_1 - \frac{1}{2}\lambda, \tag{41.1}$$

gdzie n jest współczynnikiem załamania światła dla płytki. Różnica dróg $\lambda/2$ odpowiada zmianie fazy o π przy odbiciu fali od środka gęstszego (por. rozdz. 42).

Przy odbiciu promieni w drugiej płytce różnica dróg optycznych promieni 2 i 1 jest następująca:

$$\Delta_2 = 2dn\cos\beta_2 - \frac{1}{2}\lambda. \tag{41.2}$$

Całkowita różnica dróg Δ powstająca między promieniami po przejściu obu płytek

$$\Delta = \Delta_2 - \Delta_1 = 2dn(\cos\beta_2 - \cos\beta_1). \tag{41.3}$$

Ta różnica dróg optycznych decyduje o wyniku interferencji, czyli o natężeniu promienia 3. Gdy $\Delta = k\lambda$, następuje maksymalne wzmocnienie promienia, natomiast gdy $\Delta = (k + 1/2)\lambda$ – maksymalne wygaszenie (k jest liczbą całkowitą).

Z powyższego równania widać, że Δ jawnie zależy od różnicy kątów β_1 i β_2. Te kąty jednak zależą od kątów padania, więc różnica dróg zależy także od różnicy kątów padania α_1 i α_2.

Jeżeli obie płytki są dokładnie równoległe, to $\beta_1 = \beta_2$, $\Delta = 0$ i występuje maksymalne wzmocnienie obu promieni, niezależnie od wartości kątów i długości fali. Taka sytuacja jest dla celów ćwiczenia nieużyteczna. Jeżeli jednak obie płytki tworzą kąt ϑ różny od zera (zazwyczaj bardzo mały), to między promieniami 1 i 2 wytworzy się różnica dróg, zależna od kąta ϑ oraz od kąta padania α_1 światła na płytkę P_1.

W celu wytworzenia obrazu interferencyjnego złożonego z kolejno po sobie następujących prążków jasnych i ciemnych wiązka światła padająca na płytkę P_1 musi być rozbieżna. Wówczas różnym parom promieni odpowiadają różne wartości kątów α_1, a więc także różne wartości Δ. W rezultacie powstaje układ *prążków interferencyjnych*, przy czym każdy z prążków odpowiada określonemu kątowi padania. Gdy S jest źródłem światła białego, są to prążki barwne o różnej szerokości, łatwo rozróżnialne jeden od drugiego.

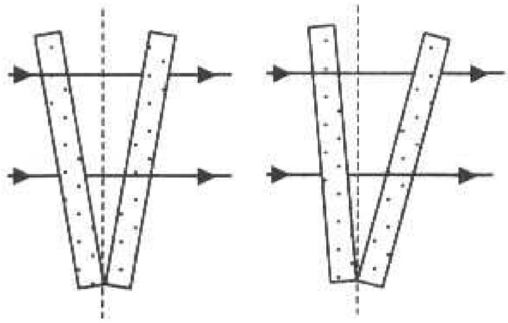
Płytki w interferometrze Jamina są dość grube, aby wiązki promieni 1 i 2 były znacznie rozsunięte. Pozwala to wprowadzić w każdą z wiązek inną substancję załamującą, np. na drodze wiązki 1 ustawiamy rurkę z powietrzem pod ciśnieniem normalnym (o współczynniku załamania n_0), a na drodze wiązki 2 – rurkę z powietrzem pod ciśnieniem zwiększonym lub zmniejszonym (o współczynniku załamania n_1). Wówczas między promieniami powstaje dodatkowa różnica dróg optycznych, dana równaniem:

$$\Delta' = (n_1 - n_0)l, \qquad (41.4)$$

gdzie l oznacza długość rurki.

Jeżeli ta dodatkowa różnica $\Delta = k\lambda$, to cały obraz interferencyjny przesuwa się o k prążków (oczywiście, k może być ułamkiem). Wyznaczając z obserwacji k, znajdujemy różnicę współczynników załamania spowodowaną zmianą ciśnienia powietrza.

Do łatwiejszego wyznaczenia przesunięcia obrazu interferencyjnego stosuje się *kompensator Jamina*, pozwalający sprowadzić obraz do położenia początkowego.



Rys. 41.2. Kompensator Jamina w położeniu symetrycznym (po lewej) i niesymetrycznym (po prawej)

Kompensator Jamina stanowią dwie płytki płasko-równoległe umocowane na wspólnej poziomej osi, jedna obok drugiej, w taki sposób, że jeden z promieni interferujących przechodzi przez jedną z nich, a drugi przez drugą. Płytki tworzą między sobą pewien kąt (rys. 41.2). Gdy płytki ustawimy tak, że promienie biegnące przez interferometr są prostopadłe do dwusiecznej kąta między nimi, drogi optyczne obu promieni są równe. Gdy natomiast kompensator obrócimy o pewien kąt, drogi stają się niejednakowe, gdyż promienie padają na płytki pod różnymi kątami.

Obrotu kompensatora dokonujemy za pomocą mechanizmu zaopatrzonego w mikromierz, którego przesuw jest proporcjonalny do kąta obrotu kompensatora. W rezultacie różnica dróg Δ' jest proporcjonalna do przesuwu mikromierza Δs:

$$\Delta' = C\Delta s\,, \tag{41.5}$$

gdzie C jest stałą aparaturową. Po połączeniu wzorów (41.4) i (41.5) otrzymujemy wyrażenie na współczynnik załamania przy danym ciśnieniu:

$$n_1 = n_0 + \frac{C\Delta s}{l}\,. \tag{41.6}$$

W czasie właściwych pomiarów zmiany dróg optycznych wywołane zmianą współczynnika załamania kompensujemy zmianami dróg powodowanymi skręceniem kompensatora, sprowadzając obraz interferencyjny do stanu początkowego.

Część wiązek 1 i 2 nie przechodzi ani przez badane substancje, ani przez kompensator, dzięki czemu wytworzony przez nie obraz interferencyjny jest stały i może służyć jako układ odniesienia w pomiarze przesunięcia lub w kompensacji.

W zestawie, na którym wykonujemy ćwiczenie, interferometr, kompensator oraz równoległe kuwety z powietrzem stanowią zabudowany komplet. Pompka do wytwarzania nadciśnienia i podciśnienia oraz manometr cieczowy do jego pomiaru są połączone z jedną kuwetą elastycznym przewodem.

Manometr ma kształt *U-rurki* napełnionej częściowo cieczą. Jeden koniec rurki jest otwarty, więc nad cieczą panuje ciśnienie atmosferyczne, natomiast drugi jest połączony z rurą interferometru zawierającą badany gaz o innym ciśnieniu. W wyniku różnicy ciśnień poziomy cieczy w manometrze ulegną zmianie. Odczyt poziomów cieczy pozwala na obliczenie różnicy ciśnień ze wzoru:

$$p = \rho\, g(h_2 - h_1)\,, \tag{41.7}$$

gdzie: h_1 i h_2 – poziomy cieczy, ρ – gęstość cieczy, g – przyspieszenie ziemskie.

Przebieg ćwiczenia

1. Za pomocą pompki wytworzyć największe nadciśnienie, jakie zamierzamy badać. Przez obrót kompensatora doprowadzić do pokrycia się górnych i dolnych prążków. Odczytać położenie kompensatora.
2. Patrząc w lunetkę (a nie na mikromierz), zmniejszyć ciśnienie, tak aby rząd prążków przesunął się o około połowę odstępu między sąsiednimi prążkami.
3. Za pomocą kompensatora spowodować cofnięcie prążków do poprzedniego położenia. Odczytać wysokość słupów cieczy w ramionach manometru oraz położenie kompensatora.
4. Znaleźć różnicę dróg optycznych dla różnych ciśnień, dochodząc do podciśnienia o wartości podobnej do początkowego nadciśnienia.

5. Wykorzystując wzór (41.6), obliczyć współczynniki załamania; za n_0 przyjąć wartość przy 760 mm Hg.
6. Wykorzystując wzór (41.7), obliczyć wartości ciśnienia dla wszystkich pomiarów.
7. Sporządzić wykres zależności współczynnika załamania powietrza od ciśnienia.
8. Oszacować błędy pomiaru różnicy wysokości cieczy i różnicy wskazań mikromierza oraz obliczyć błędy ciśnienia i współczynnika załamania dla kilku punktów pomiarowych.
9. Nanieść prostokąty błędów na wykres.

Zestaw ćwiczeniowy

Interferometr Jamina, manometr cieczowy, zawór, pompka

Pojęcia kluczowe i pytania

- Współczynnik załamania (rozdz. 39 i 40)
- Droga optyczna
- Przejście światła przez płytkę płasko-równoległą, różnica dróg promieni
- Interferencja, warunki wzmocnienia i wygaszania (rozdz. 43)
- Obraz interferencyjny dla płytek równoległych i ustawionych pod kątem, zmiana fazy przy odbiciu (patrz też rozdz. 42)
- Interferometr Jamina, różnica dróg optycznych promieni przechodzących przez rurki, kompensator Jamina
- Manometry cieczowe, obliczenie ciśnienia

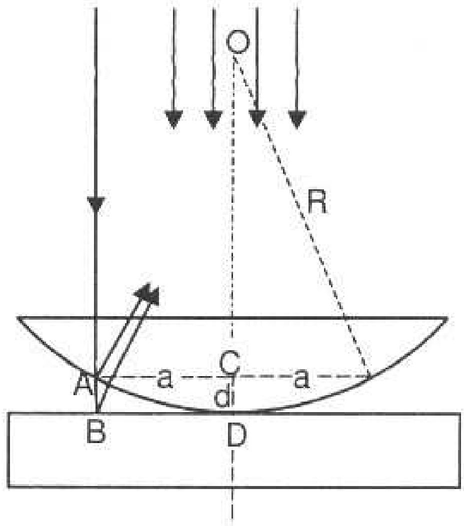
42. Wyznaczanie promienia krzywizny soczewki za pomocą pierścieni Newtona

Pierścienie Newtona

Kołowe pierścienie interferencyjne, zwane *pierścieniami Newtona*, powstają, gdy równoległa wiązka światła pada na układ złożony z dokładnie płaskiej płyty szklanej oraz leżącej na niej soczewki płasko-wypukłej o promieniu krzywizny R (rys. 42.1).

Między soczewką i płytą znajduje się warstewka powietrza o grubości d wzrastającej ze wzrostem odległości od osi układu. Promień krzywizny soczewki wynosi kilkadziesiąt centymetrów i jest znacznie większy niż promienie pierścieni Newtona; są one rzędu jednego milimetra.

Obraz interferencyjny powstaje w wyniku nałożenia się promieni odbitych od dolnej powierzchni soczewki i od górnej powierzchni płyty. Na rysunku 42.1 przedstawiono przykładowy bieg wybranego promienia. Część promienia padającego pionowo z góry odbija się od górnej powierzchni płyty (na rysunku w punkcie B) i biegnie z powrotem ku górze. Druga część odbija się od wewnętrznej powierzchni (sferycznej) soczewki (na rysunku w punkcie A) i również biegnie w górę do obiektywu mikroskopu.



Rys. 42.1. Układ do wytwarzania pierścieni Newtona

Należy zauważyć, że promień krzywizny soczewki na rysunku jest znacznie mniejszy niż w rzeczywistości, żeby umożliwić zaznaczenie wszystkich szczegółów istotnych dla zjawiska. W skali rysunku powierzchnia soczewki powinna być niemal równoległa do powierzchni płytki, a promienie odbite – prawie pionowe.

Różnica dróg geometrycznych obu promieni wynosi $2d$. Grubość szczeliny d zmienia się w miarę oddalania od punktu środkowego, więc możemy się spodziewać, że dla niektórych grubości będzie spełniony warunek wzmocnienia i promień tam padający odbije się jako jasny. Promienie padające w innych miejscach będą po odbiciu wygaszone.

Dla obliczenia dróg optycznych przyjmujemy, że współczynnik załamania powietrza jest równy jedności, a także uwzględniamy fakt, że odbiciu od ośrodka gęstszego towarzyszy zmiana fazy o 180°, czemu odpowiada dodatkowa zmiana dróg $\lambda/2$.

Biorąc powyższe pod uwagę, możemy napisać warunek powstania jasnego pierścienia interferencyjnego:

$$2d + \frac{\lambda}{2} = m\lambda \qquad (m = 1,2,3...). \tag{42.1}$$

przy czym m nazywa się *rzędem pierścienia*; inaczej jest to numer pierścienia liczony od środka. Na podstawie rys. 42.1 możemy wyrazić grubość warstwy powietrznej przez promień pierścienia interferencyjnego a:

$$d = R - \sqrt{R^2 - a^2} = R - R\sqrt{1 - \left(\frac{a}{R}\right)^2}. \tag{42.2}$$

Pamiętając, że $a/R << 1$, możemy zastosować rozwinięcie wyrażenia pierwiastkowego w szereg, po czym uzyskamy postać:

$$d = R - R\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{a}{R}\right)^2 + \cdots\right] \approx \frac{a^2}{2R}. \tag{42.3}$$

Po połączeniu ostatniego równania z równaniem (42.1) otrzymamy:

$$a = \sqrt{\left(m - \tfrac{1}{2}\right)\lambda R} \quad (m = 1,2,3...) \tag{42.4}$$

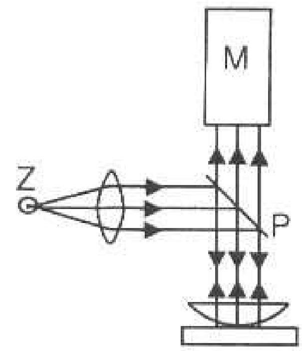
Otrzymane równanie określa promienie jasnych prążków interferencyjnych.

W miejscu zetknięcia się soczewki z płytą tworzy się bardzo cienka warstewka powietrza o grubości wielokrotnie mniejszej niż długość fali. Różnica dróg optycznych powstająca między promieniami w tym punkcie jest skutkiem jedynie straty połowy długości fali przy odbiciu od płyty. W rezultacie wynosi ona $\lambda/2$; w środku obrazu interferencyjnego obserwujemy ciemne pole.

Jeżeli układ oświetlamy światłem białym, powstają barwne szerokie pierścienie, które przy wyższych rzędach mogą zachodzić na siebie.

Pomiary i obliczenia

W celu wyznaczenia promieni pierścieni Newtona posługujemy się przystosowanym do tego celu mikroskopem. Płytę z soczewką umieszczamy w polu widzenia mikroskopu na stoliku przesuwanym w poziomie w dwóch kierunkach za pomocą śrub mikrometrycznych. Aby umożliwić jednoczesne oświetlenie układu i obserwację obrazu, na osi optycznej mikroskopu *M* (rys. 42.2) umieszczamy płytkę półprzeźroczystą *P* nachyloną pod kątem 45° do kierunku biegu promieni. Płytka odbija część promieni pochodzących ze źródła *S* i kieruje je do układu, gdzie ulegają odbiciu i interferencji, po czym przechodzą przez płytkę *P* do obiektywu mikroskopu.



Rys. 42.2. Układ do obserwacji pierścieni Newtona; *M* – mikroskop, *P* – płytka półprzezroczysta

Okular mikroskopu jest zaopatrzony w krzyż z nitek pajęczych, dzięki czemu możemy precyzyjnie ustawić wybrany fragment obrazu w polu widzenia. Przesuwając stolik wzdłuż linii przechodzącej przez środek obrazu tylko w kierunku *X*, można znaleźć położenia jasnych pierścieni po prawej a_p i po lewej a_l stronie od środka. Promień prążka rzędu m obliczymy jako połowę średnicy:

$$a_m = \frac{(a_p - a_l)}{2}.$$

Jeżeli związek (42.4) przekształcimy do postaci

$$a_m^2 = \lambda R\left(m - \frac{1}{2}\right), \tag{42.5}$$

to widać, że pożyteczne będzie sporządzenie wykresu we współrzędnych $y = a^2$, $x = (m - 1/2)$, ponieważ wykresem będzie wtedy linia prosta. Współczynnik nachylenia wynosi λR. Wartość tego współczynnika znajdziemy z regresji liniowej; oznaczmy ją a_r (nie mylić z promieniem prążka!). Z przyrównania otrzymamy ostatecznie wartość szukanego promienia krzywizny soczewki:

$$R = \frac{a_r}{\lambda}. \tag{42.6}$$

Wartość λ jest dostępna w laboratorium.

Przebieg ćwiczenia

1. Za pomocą śrub przesuwu stolika zmierzyć położenie kolejnych jasnych pierścieni po prawej stronie względem środka. To samo zrobić dla lewych krawędzi pierścieni. Pomiary wykonać dla wszystkich dających się zmierzyć pierścieni.
2. Obliczyć promienie pierścieni.
3. Zrobić wykres $a^2 = f(m - 1/2)$.
4. Obliczyć współczynnik nachylenia i jego błąd, stosując regresję liniową. Jeżeli część punktów pomiarowych odbiega od linii prostej, to te punkty należy odrzucić. Najbardziej prawdopodobną przyczyną nieliniowości jest deformacja soczewki w pobliżu punktu styczności z płytą, spowodowana nadmiernym dociskiem. Wynikiem tego jest powiększenie promieni pierścieni niskich rzędów.
5. Wyznaczyć promień krzywizny soczewki na podstawie równania (42.6).
6. Obliczyć błąd metodą różniczki zupełnej lub logarytmicznej.
7. Zaokrąglić wyniki obliczeń i podać ostateczną postać.

Zestaw ćwiczeniowy

Mikroskop z przesuwanym stolikiem, źródło światła monochromatycznego, soczewka, płyta szklana

Pojęcia kluczowe i pytania

- Falowa natura światła (rozdz. 43), fale elektromagnetyczne (rozdz. 43), długość fali (rozdz. 22)
- Interferencja (rozdz. 43), warunki wygaszania i wzmocnienia (rozdz. 43), spójność fal (rozdz. 43)
- Zmiana fazy po odbiciu, droga optyczna (rozdz. 41)

- Układ do wytwarzania pierścieni Newtona; jakie promienie interferują?, w którym miejscu następuje skok fazy?
- Warunek powstania pierścienia jasnego, rząd prążka a różnica dróg, jasność prążka zerowego rzędu
- Układ do obserwacji prążków; jakie wielkości należy zmierzyć, a jakie obliczyć?, współrzędne wykresu do obliczenia promienia krzywizny
- Regresja liniowa

43. Wyznaczanie stałej siatki dyfrakcyjnej

Wprowadzenie

Światło jest *falą elektromagnetyczną*, tzn. falą polegającą na rozchodzeniu się w przestrzeni zmian natężenia pola elektrycznego i magnetycznego. W zjawiskach optycznych decydującą rolę odgrywa wektor natężenia pola elektrycznego E, zwany w skrócie *wektorem elektrycznym*. W związku z tym do opisania fali świetlnej wystarcza określenie tego wektora w funkcji czasu i współrzędnych przestrzennych. Zachowanie się wektora elektrycznego fali biegnącej w kierunku osi x opisuje funkcja falowa:

$$E = E_0 \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi_0\right], \tag{43.1}$$

gdzie T i λ oznaczają odpowiednio okres i długość fali, φ_0 jest fazą początkową.

Fale dowolnego rodzaju, a więc także fale świetlne, mogą ulegać dyfrakcji i interferencji. Podstawę do wyjaśnienia tych zjawisk stanowi *zasada Huyghensa*: każdy punkt, do którego dochodzi fala, staje się źródłem nowej fali kulistej.

Interferencja polega na nakładaniu się dwóch lub większej liczby fal. W określonym punkcie przestrzeni nastąpi wzmocnienie lub osłabienie amplitudy, w zależności od różnicy faz nakładających się fal. Jeżeli dwie fale wybiegają z punktów o tej samej fazie początkowej, np. z różnych szczelin siatki dyfrakcyjnej, to w punkcie nałożenia występuje różnica faz wynikająca z różnicy przebytych dróg. *Warunki interferencji* możemy wyrazić zarówno przez różnicę faz $\Delta\varphi$, jak i przez różnicę dróg ΔS:

- maksimum: $$\Delta\varphi = k \cdot 2\pi, \quad \Delta S = k\lambda, \quad k = 0, 1, 2, 3... \tag{43.2}$$

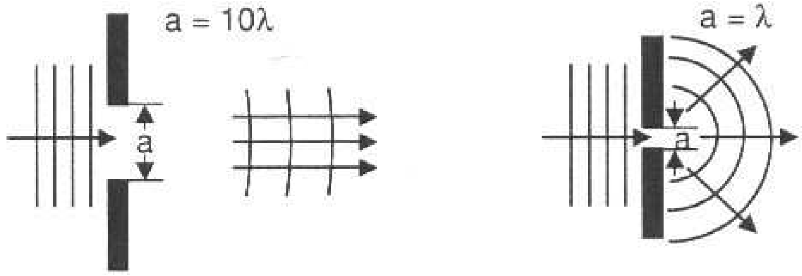
- minimum: $$\Delta\varphi = (2k+1)\pi, \quad \Delta S = (k + \frac{1}{2})\lambda, \quad k = 0, 1, 2, 3... \tag{43.3}$$

Chociaż interferencja zachodzi dla dowolnych fal, stały w czasie obraz interferencyjny można obserwować tylko wtedy, gdy nakładają się fale *spójne (koherentne)*, których różnica faz nie zmienia się w czasie.

Pojedyncza szczelina

Dyfrakcję światła obserwujemy, gdy przechodzi ono przez mały otwór w nieprzezroczystej przeszkodzie. Istotę zjawiska dyfrakcji pokazano na rys. 43.1. Zachowanie się fali za otworem, którym często jest wąska szczelina, zależy od wielkości tego otworu w stosunku do długości fali. Gdy $a >> \lambda$, szerokość przechodzącej wiązki w zasadzie jest równa szerokości otworu – oświetlenie ekranu ustawionego równolegle do przeszkody jest obrazem geometrycznym otworu. W tej sytuacji dyfrakcja nie jest widoczna.

Inaczej jest w przypadku, gdy $a \leq \lambda$; wówczas fala za szczeliną jest wyraźnie kulista i oświetla powierzchnię ekranu wielokrotnie większą od powierzchni szczeliny. Jest to przypadek dyfrakcji (ugięcia) fali na pojedynczej szczelinie.



Rys. 43.1. Przechodzenie światła przez otwory różnych wielkości

Obraz dyfrakcyjny otrzymany na ekranie jest na ogół układem szerokich prążków na przemian jasnych i ciemnych; jest on wynikiem superpozycji fal elementarnych wychodzących z różnych fragmentów szczeliny. Centralne maksimum występuje na przedłużeniu kierunku fal padających, czyli dla kąta $\vartheta = 0$ (patrz rys. 43.2), natomiast położenie kolejnych *minimów dyfrakcyjnych* (prążków ciemnych) jest określone związkiem:

$$a \sin\vartheta = m\lambda . \tag{43.4}$$

W przybliżeniu w połowie odległości między sąsiednimi minimami występują maksima oświetlenia.

Szerokość maksimum centralnego jest wyznaczona przez położenie pierwszego minimum ($m = 1$). Ze wzoru (43.4) wynika, że dla szerokich szczelin ($a >> \lambda$) pierwsze minimum pojawia się już przy bardzo małym kącie, co oznacza, że centralne maksimum jest wąskie i odwzorowuje geometryczny kształt szczeliny. Gdy szerokość szczeliny jest równa długości fali, pierwsze minimum występuje dla

kąta ϑ = 90°, co oznacza, że centralne maksimum wypełnia całą przestrzeń za szczeliną. Jeżeli ekran w tym przypadku nie jest zbyt duży, możemy przyjąć, że jego oświetlenie jest jednorodne.

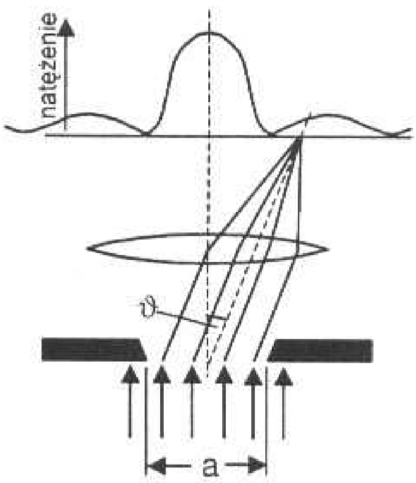
Dwie szczeliny

Obraz otrzymany na ekranie przy przechodzeniu światła przez dwie szczeliny (rys. 43.3) jest wynikiem jednoczesnego wystąpienia dwóch zjawisk: dyfrakcji światła na każdej ze szczelin oraz interferencji fal wychodzących z sąsiednich szczelin.

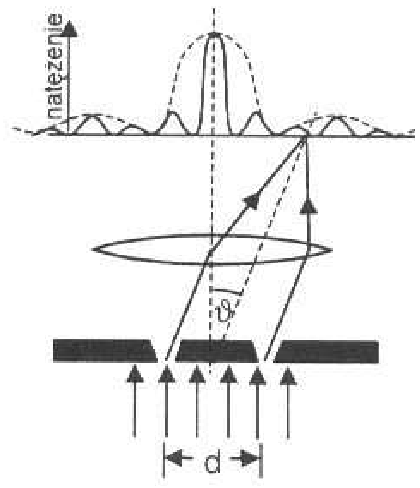
Maksima interferencyjne występują w punktach ekranu, dla których różnica dróg ΔS jest wielokrotnością długości fali. Z rysunku 43.3 widać, że $\Delta S = d\sin\vartheta$, więc położenie maksimów interferencyjnych określa związek:

$$d\sin\vartheta = m\lambda\,, \quad m = 1,2,3... \tag{43.5}$$

Odległość kątowa prążków interferencyjnych jest określona przez stosunek λ/d, gdzie d jest odległością między środkami sąsiednich szczelin. *Względne natężenie* tych prążków jest określone przez obraz dyfrakcyjny pojedynczej szczeliny, a więc zależy od stosunku λ/a, gdzie a jest szerokością szczeliny. Można



Rys. 43.2. Dyfrakcja na pojedynczej szczelinie



Rys. 43.3. Dyfrakcja na dwóch szczelinach

powiedzieć, że prążki interferencyjne mają natężenie modulowane przez dyfrakcyjną obwiednię. Gdy szczeliny są bardzo wąskie, obraz dyfrakcyjny jest bardzo szeroki – wszystkie prążki interferencyjne mają niemal takie samo natężenie i na ekranie obserwuje się tylko obraz interferencyjny.

Siatka dyfrakcyjna

Zjawiska podobne do opisanych wyżej zachodzą, gdy liczba szczelin jest większa. Taki układ równoległych szczelin, leżących w równych odległościach, nazywamy *siatką dyfrakcyjną*. Siatki dyfrakcyjne wykonuje się przez nacięcie rowków na szkle lub na metalowej płycie ostrzem diamentowym. Siatki szklane nazywamy *transmisyjnymi*, gdyż światło obserwujemy po przejściu przez szczeliny, siatki metalowe zaś nazywamy *odbiciowymi*, ponieważ interferencji ulegają tu promienie odbite. Sporządziwszy taką wzorcową siatkę dyfrakcyjną, można wykonać następne siatki. W tym celu wzorcową siatkę pokrywa się roztworem kolodium, a następnie zdejmuje stwardniałą powłokę i przykleja ją do płytki szklanej lub innej podkładki. Mniej dokładne siatki wykonuje się metodą fotograficzną.

W siatkach dyfrakcyjnych szerokość szczelin jest rzędu długości fali, więc natężenie prążków interferencyjnych jest prawie stałe.

Zwiększenie liczby szczelin od dwóch do N nie zmienia położenia maksimów interferencyjnych, które są w dalszym ciągu opisane równaniem (43.5), lecz powoduje pewne zmiany ich kształtu. Mianowicie, ze wzrostem liczby szczelin maksima stają się coraz węższe. Szerokość kątową maksimum wyraża wzór:

$$\Delta\vartheta_0 = \frac{\lambda}{Nd\cos\vartheta_m}, \tag{43.6}$$

gdzie ϑ_m oznacza kąt występowania maksimum rzędu m.

Z równania (43.5) widać, że położenie maksimum zmienia się z długością fali. Ta właściwość pozwala na zastosowanie siatek dyfrakcyjnych do rozdzielania przestrzennego składowych światła złożonego, czyli do analizy widmowej.

Aby móc rozróżnić fale, których długości niewiele się różnią, maksima główne powinny być możliwie najwęższe. *Zdolność rozdzielczą* siatki dyfrakcyjnej definiujemy następująco:

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}, \tag{43.7}$$

gdzie λ jest średnią długością fali dwóch linii widmowych ledwie rozróżnialnych, a $\Delta\lambda$ jest różnicą długości fal między nimi.

Według *kryterium Rayleigha* dwa maksima są ledwie rozróżnialne, gdy ich odległość kątowa jest taka, że maksimum jednej linii przypada na minimum drugiej. Jeśli zastosujemy to kryterium, to okaże się, że zdolność rozdzielcza siatki dyfrakcyjnej jest proporcjonalna do całkowitej liczby szczelin oraz do rzędu widma

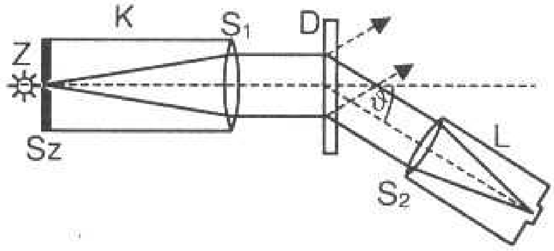
$$R = Nm \tag{43.8}$$

Zasada pomiaru

Stałą siatki dyfrakcyjnej d nazywamy odległość między środkami sąsiednich szczelin. W celu znalezienia tej wielkości zastosujemy wzór (43.5), który po przekształceniu przyjmie postać:

$$d = \frac{m\lambda}{\sin\vartheta}. \qquad (43.9)$$

Badania siatki dyfrakcji wykonujemy, stosując światło o określonej długości fali, najczęściej sodowe (λ = 589,6 nm). Wartość kątów ϑ dla poszczególnych rzędów odczytujemy za pomocą spektrometru zaopatrzonego w dokładną podziałkę kątową. Bieg promieni w spektrometrze siatkowym jest przedstawiony na rys. 43.4. Rozbieżne światło z lampy Z wpada do *kolimatora* K składającego się ze



Rys. 43.4. Stolik spektrometryczny; D – siatka dyfrakcyjna, K – kolimator, L – lunetka, S_1,S_2 – soczewki, Z – źródło światła

szczeliny Sz i soczewki S_1. Ponieważ szczelina znajduje się w ognisku soczewki, wiązka wychodząca z kolimatora jest równoległa. Po przejściu przez siatkę dyfrakcyjną SD wiązka zostaje skupiona przez soczewkę S_2 lunetki L, dzięki czemu obserwujemy ostry obraz szczeliny. Lunetka jest wyposażona w krzyż z nitek pajęczych, co pozwala na precyzyjne ustawienie obrazu szczeliny w polu widzenia. Kolimator jest trwale połączony z podstawą spektrometru, natomiast lunetka jest połączona z kątomierzem i może być obracana wokół osi spektrometru. Kątowe położenie lunetki może być odczytywane z dużą dokładnością za pomocą skali kątowej zaopatrzonej w noniusz.

Przebieg ćwiczenia

1. Znaleźć za pomocą lunetki obraz szczeliny bez siatki, ewentualnie doregulować szerokość szczeliny i ostrość lunetki.
2. Naprowadzić obraz szczeliny na skrzyżowanie nitek pajęczych i zanotować położenie lunetki – jest to położenie prążka zerowego rzędu ϑ_0.
3. Ustawić na stoliku spektrometru siatkę dyfrakcyjną i odczytać położenie prążków wyższych rzędów po lewej i prawej stronie ϑ_l i ϑ_p. Znaleźć kąty ugięcia dla każdego rzędu, obliczając różnice $|\vartheta_0 - \vartheta_l|$ oraz $|\vartheta_p - \vartheta_0|$.
4. Obliczyć stałą siatki z każdego pomiaru.

5. Obliczyć wartość średnią i odchylenie standardowe średniej. Jeżeli pomiary tworzą małą serię, pomnożyć je przez współczynnik Studenta-Fishera.
6. Zaokrąglić wyniki obliczeń i przedstawić ostateczną postać wyniku.

Zestaw ćwiczeniowy

Lampa sodowa, stolik spektrometryczny (patrz też rozdz. 38), siatka dyfrakcyjna

Pojęcia kluczowe i pytania

- Falowy charakter światła, zasada Huyghensa
- Interferencja, warunki wzmocnienia i osłabienia wyrażone przez fazę i przez drogę, spójność (koherencja)
- Dyfrakcja na pojedynczej szczelinie: zależność obrazu od szerokości szczeliny, położenie minimów, szerokość maksimum
- Dwie szczeliny: warunek maksimum; od czego zależy odległość między prążkami, a od czego względne natężenie?
- Siatka dyfrakcyjna: konstrukcja, szerokość maksimów głównych, zdolność rozdzielcza
- Budowa spektrometru
- Co należy zmierzyć, a co obliczyć?
- Noniusz (rozdz. 5)

44. Badanie widm za pomocą spektroskopu

Wprowadzenie

Światło emitowane przez dowolne źródło promieniowania składa się z fal elektromagnetycznych o różnych długościach. Możemy się o tym przekonać, przepuszczając światło przez pryzmat lub siatkę dyfrakcyjną – przyrządy powodujące *dyspersję*, czyli rozszczepienie światła. Gdy światło białe po przejściu przez wąską podłużną szczelinę pada na pryzmat (rys. 44.1), ulega dwukrotnie załamaniu na ścianach łamiących oraz rozszczepieniu barwnemu polegającemu na różnym odchyleniu promieni o różnych barwach. Promienie czerwone są odchylane najmniej, a fioletowe najsilniej.

Rozszczepienie jest bezpośrednim następstwem faktu, że współczynnik załamania zależy od długości fali. *Dyspersją ośrodka* nazywamy pochodną współczynnika załamania względem długości fali:

$$D_0 = \frac{dn}{d\lambda}. \tag{44.1}$$

Wielkość tę możemy przedstawić w postaci funkcyjnej, gdyż znana jest przybliżona zależność współczynnika załamania od długości fali. Ma ona dla ciał przezroczystych postać:

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2}, \tag{44.2}$$

gdzie A i B są pewnymi stałymi.

Uwzględniając powyższe, znajdujemy, że dyspersję ośrodka w zależności od długości fali wyraża równanie:

$$D_0 = -\frac{2B}{\lambda^3}. \tag{44.3}$$

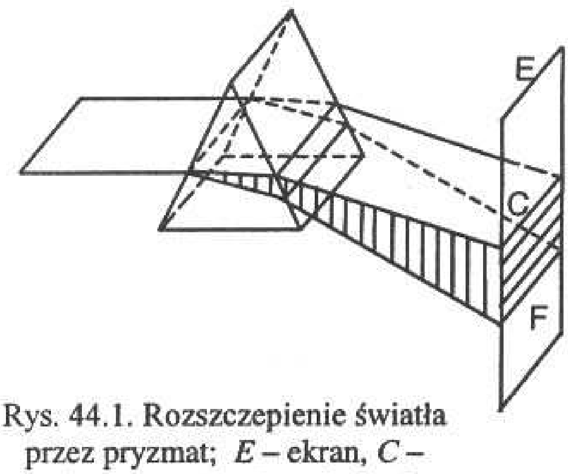
Widzimy, że dyspersja ośrodka wzrasta szybko, gdy długość fali maleje.

Wielkość rozszczepienia przez pryzmat zależy nie tylko od dyspersji ośrodka, lecz również od kąta padania i kąta łamiącego. Wielkością charakteryzującą rozszczepienie przez dany pryzmat jest *dyspersja kątowa* pryzmatu:

$$D = \frac{d\varphi}{d\lambda}, \tag{44.4}$$

gdzie φ jest kątem odchylenia.

Symulacja komputerowa zjawisk w interferometrze jest do pobrania z Internetu - www.phys.put.poznan.pl.
Zobaczysz i zrozumiesz budowę, bieg promieni, powstawanie różnicy dróg, działanie kompensatora i in.
Możesz sam zmieniać ciśnienie, obracać kompensatorem i obserwować obraz interferencyjny.
Możesz także wykonać obliczenia potrzebne w ćwiczeniu.
Poćwicz symulacje przed przystąpieniem do ćwiczenia.

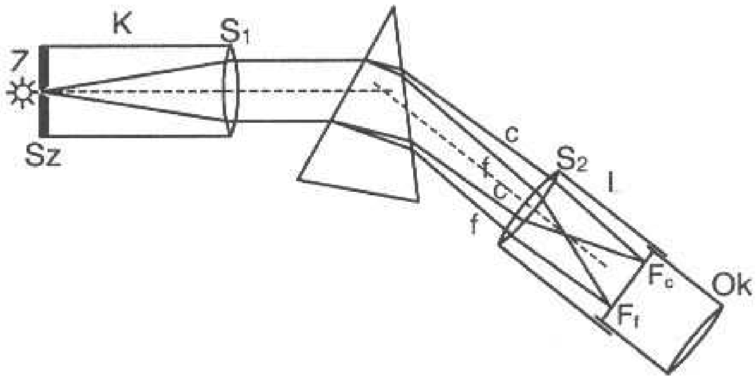


Rys. 44.1. Rozszczepienie światła przez pryzmat; E – ekran, C – wiązka czerwona, F – wiązka fioletowa

Obraz rozszczepionej wiązki na ekranie nazywamy *widmem* promieniowania danego źródła światła. Ciała stałe w podwyższonej temperaturze emitują promieniowanie o *widmie ciągłym,* zawierające wszystkie długości fal. Gazy dwuato-

mowe i bardziej złożone, pobudzone do świecenia, emitują długości fal z pewnych przedziałów, dając *widmo pasmowe*.

Gazy jednoatomowe oraz pary ciał stałych promieniują *widmo liniowe*, w którym występuje od kilku do kilkudziesięciu długości fal o ściśle określonych wartościach. Widmo liniowe ma postać układu wąskich, barwnych linii (prążków). Każdy pierwiastek ma swoje indywidualne widmo, niepowtarzające się dla żadnego innego pierwiastka. Ta właściwość stanowi podstawę metody identyfikacji



Rys. 44.2. Budowa spektroskopu pryzmatycznego; K – kolimator, L – lunetka, Ok – okular, S_1, S_2 – soczewki, c – czerwony, f – fioletowy

pierwiastków na podstawie ich widm – *analizy widmowej* lub *spektralnej*. Widma wszystkich pierwiastków są znane i podane w odpowiednich tablicach. W celu zidentyfikowania jakiegoś pierwiastka należy doświadczalnie wyznaczyć jego widmo i następnie znaleźć w tablicach pierwiastek mający identyczne widmo.

Do badania widm używa się *spektroskopów*, w których elementem rozszczepiającym światło jest siatka dyfrakcyjna lub pryzmat. Podstawowe elementy spektroskopu pryzmatycznego przedstawiono na rys. 44.2.

Światło z badanego źródła Z_1 oświetla szczelinę Sz znajdującą się w ognisku soczewki S_1. Szczelina wraz z soczewką stanowią kolimator wytwarzający równoległą wiązkę światła. Po przejściu wiązki przez pryzmat z każdego jego punktu wychodzą rozszczepione wiązki rozbieżne, które się przecinają, jednak promienie o tej samej długości fali są równoległe. Promieniom o każdej długości fali odpowiada inny kąt względem osi optycznej soczewki S_2, dzięki czemu wszystkie one mają ogniska w jednej płaszczyźnie ogniskowej, ale ognisko dla każdej barwy (długości fali) znajduje się w innej odległości od osi optycznej. Na rysunku 44.2 pokazano bieg skrajnych promieni widma optycznego: czerwonego (c) i fioletowego (f), które na końcu skupiają się w ogniskach F_c i F_f. Ostatecznie w płaszczyźnie ogniskowej powstaną wąskie, rozdzielone obrazy szczeliny – linie widmowe – o takich barwach, jakie są zawarte w promieniowaniu źródła.

Widmo możemy rejestrować, ustawiając w płaszczyźnie ogniskowej kliszę fotograficzną lub inny detektor, albo obserwować przez okular Ok. Kierunek, w którym biegnie promień o określonej długości fali, zależy od ustawienia pryzmatu względem lunetki. Jeżeli pryzmat jest nieruchomy, to wejście promienia do okularu

wymaga odpowiedniego obrotu okularu. Jeżeli okular jest nieruchomy, to musi być możliwość obrotu pryzmatu, aby promień wpadł do okularu.

Cechowanie spektroskopu

Skala używanego w ćwiczeniu spektrometru jest względna, nie daje bezpośrednio długości fali. Aby określić długość fal występujących w danym widmie, musimy najpierw *wycechować* spektroskop, tzn. przyporządkować danym podziałkom skali określone długości fali. *Skala przyrządu* może występować na tle widma albo określać położenie kątowe mechanizmu obrotu pryzmatu bądź lunetki. Do cechowania używamy światła substancji emitujących znane widma, umieszczonych w rurkach jarzeniowych: wodoru, helu, neonu lub par rtęci. Rurki te, zwane *rurkami Geisslera,* są pobudzane do świecenia wysokim napięciem z cewki Ruhmkorffa. Rurkę umieszczamy przed szczeliną kolimatora w odległości 2–3 cm i ustalamy jej pozycję tak, aby oglądane przez lunetkę widma miały jak największą jasność.

Musimy dysponować tabelą zawierającą kolory linii, ich natężenie i długości fal znanego gazu. Żeby właściwie zidentyfikować oglądaną w lunetce linię, należy starannie porównać jej parametry z parametrami linii w tabeli, a także porównać linie sąsiednie. Po identyfikacji odczytujemy na skali położenia linii i zapisujemy je w tabelce pomiarów razem z długością fali. Dobrze jest również zanotować względne natężenie linii (bardzo silna, silna, słaba).

Zależność między długością fali a położeniem na skali poszczególnych linii widmowych przedstawiamy graficznie w postaci ciągłej krzywej zwanej *krzywą dyspersji*. Krzywa dyspersji pozwala na znalezienie długości fali nieznanej linii (rzędna krzywej dyspersji), gdy znane jest jej położenie na skali, czyli odcięta wykresu dyspersji.

Analiza widm

Obserwując za pomocą spektroskopu ciało świecące, otrzymujemy jego *widmo emisyjne*. W celu identyfikacji widma przypisujemy (odwrotnie niż przy cechowaniu) położeniom linii na skali długości fal odczytane z krzywej dyspersji. Mając określone długości fal, jak również zaznaczone ich względne natężenia, znajdujemy w tablicach spektroskopowych pierwiastek mający uzyskane widmo.

Spektroskop można wykorzystać również do badania *widma absorpcyjnego* (widma pochłaniania). W tym celu umieszczamy przed szczeliną kolimatora kuwetę z cieczą lub płytkę barwną z ciała stałego i kierujemy na nią w stronę kolimatora światło białe. Gdyby nie było pochłaniania, w lunetce powstałby obraz widma ciągłego. Dla większości ciał zabarwionych otrzymujemy jednak ciemne pasma na tle widma ciągłego. Ten układ ciemnych pasm (dla ciał stałych i cieczy) lub linii (dla gazów) nazywamy widmem absorpcyjnym.

Niektóre ciała można pobudzić do świecenia przez naświetlanie ich z innego źródła. Ten rodzaj świecenia nazywamy *fotoluminescencją*. Widmo fotoluminescencji otrzymujemy podobnie jak widma absorpcji, z tą różnicą, że obecnie lampę naświetlającą umieszczamy nie przed szczeliną kolimatora, lecz z boku, tak że wiązka światła pobudzającego biegnie prostopadle do osi kolimatora.

Badając widmo absorpcji i widmo luminescencji dla tej samej substancji, zauważamy, że to ostatnie jest przesunięte bardziej w stronę fal długich. Ta prawidłowość nosi nazwę *reguły Stokesa* i może być wytłumaczona na podstawie zasady zachowania energii. Mianowicie, kwant promieniowania pochłoniętego ma energię $h\nu_a$, która nie może być mniejsza niż energia kwantu emitowanego $h\nu_e$, gdyż światło pochłonięte jest źródłem energii dla emisji. Zatem

$$h\nu_a \geq h\nu_e. \tag{44.5}$$

Biorąc pod uwagę związek $\nu = c/\lambda$, otrzymamy nierówność $\lambda_e \geq \lambda_a$, która wyraża właśnie regułę Stokesa.

Przebieg ćwiczenia

1. Ustawić rurkę geisslerowską ze znanym gazem przed szczeliną kolimatora.
2. Ustawić wybraną linię widma na środek pola widzenia.
3. W tabeli spektralnej znaleźć linię o tych samych parametrach i takim samym otoczeniu. Odczytać z tablicy długość fali λ, a z pokrętła obrotu pryzmatu – położenie na skali s.
4. Powtarzać punkty 2 i 3 dla wszystkich linii.
5. Na papierze milimetrowym wykreślić krzywą dyspersji, czyli zależność $\lambda(s)$.
6. Znaleźć położenia na skali s wszystkich linii widma nieznanego gazu.
7. Z krzywej dyspersji znaleźć długości fal widma badanego.
8. W tablicach spektralnych znaleźć widmo najlepiej odpowiadające widmu badanemu.
9. Zestawić w tabelce linie gazu badanego i gazu znalezionego.

Zestaw ćwiczeniowy

Spektroskop pryzmatyczny, rurki Geisslera, induktor Ruhmkorffa, kuweta z cieczą pochłaniającą i luminezującą, lampy oświetlające

Pojęcia kluczowe

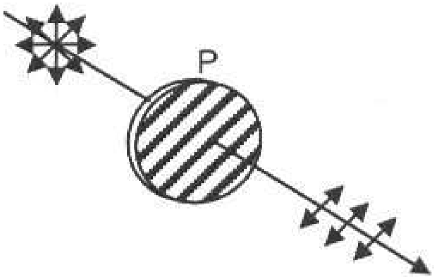
- Załamanie i rozszczepienie światła przez pryzmat, dyspersja ośrodka, dyspersja kątowa pryzmatu
- Widma liniowe, pasmowe i ciągłe
- Identyfikacja pierwiastków na podstawie widm

- Budowa spektroskopu, bieg promieni o różnych kolorach
- Cechowanie spektroskopu, krzywa dyspersji
- Widma absorpcyjne, fotoluminescencja, reguła Stokesa.

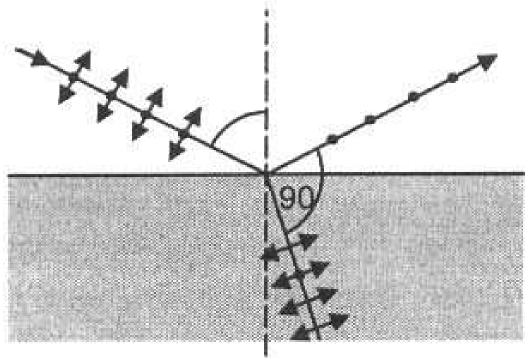
45. Badanie skręcenia płaszczyzny polaryzacji przez roztwory za pomocą polarymetru

Wprowadzenie

Światło pochodzące z naturalnych źródeł jest *niespolaryzowane*, tzn. drgania wektora świetlnego odbywają się prostopadle do kierunku rozchodzenia się promieni, lecz we wszystkich możliwych płaszczyznach, na których ten kierunek leży (rys. 45.1 – przed polaryzatorem). Gdy na drodze wiązki niespolaryzowanego światła ustawimy *polaryzator*, przepuści on tylko te promienie, w których drgania odbywają się w jednej płaszczyźnie. Światło po przejściu przez polaryzator jest *spolaryzowane liniowo* – końce wektorów świetlnych leżą na linii prostej.



Rys. 45.1. Wytwarzanie światła spolaryzowanego liniowo; *P* – polaryzator



Rys. 45.2. Polaryzacja przy odbiciu; ϑ_p – kąt Brewstera

Linie równoległe na polaryzatorze, które w rzeczywistości nie są widoczne, przedstawiają charakterystyczne kierunki polaryzacji płytki.

Polaryzacja przez odbicie

Na skutek odbicia światła od granicy dwóch ośrodków (rys. 45.2) zarówno promień odbity, jak i załamany zostają częściowo spolaryzowane. Stopień polaryzacji zależy od kąta padania – jeżeli dobierzemy go tak, aby kąt między promieniami odbitym i załamanym był prosty (rys. 45.2), to promień odbity jest całkowicie spolaryzowany w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny padania, natomiast promień załamany jest spolaryzowany częściowo, z przewagą drgań w płaszczyź-

nie równoległej do płaszczyzny padania. Kąt ϑ_p nazywamy *kątem całkowitej polaryzacji* lub *kątem Brewstera*. Stopień polaryzacji wiązki załamanej możemy zwiększyć, przepuszczając ją przez zespół płytek równoległych.

Polaryzacja w kryształach anizotropowych

Jeżeli właściwości kryształu zależą od kierunku, to kryształ jest *anizotropowy*, w przeciwnym razie jest *izotropowy*. W zjawisku *podwójnego załamania* przez kryształy anizotropowe padająca wiązka ulega rozdzieleniu na dwie: zwyczajną (o) i nadzwyczajną (e), o prostopadłych płaszczyznach drgań. Wiązka nadzwyczajna nie spełnia prawa załamania światła (prawa Snella). Bezpośrednią przyczyną różnego zachowania się promieni o oraz e jest ich na ogół różna prędkość. Prędkość promienia zwyczajnego υ_o jest stała we wszystkich kierunkach kryształu, natomiast prędkość promienia nadzwyczajnego zmienia się, zależnie od kierunku, od wartości υ_o do wartości υ_e, przy czym υ_e dla pewnych kryształów jest mniejsza niż υ_o, dla innych – większa. Kierunek w krysztale anizotropowym, dla którego $\upsilon_e = \upsilon_o$, nazywamy *osią optyczną* kryształu. Promień biegnący w krysztale równolegle do osi optycznej nie ulega podwójnemu załamaniu. Jeżeli usuniemy jedną z wiązek, na wyjściu kryształu anizotropowego otrzymamy światło spolaryzowane liniowo. Pospolitym przyrządem wykorzystującym opisane zjawisko jest pryzmat Nicola.

Polaryzacja i dichroizm

Niektóre podwójnie załamujące kryształy mają właściwość zwaną *dichroizmem*, polegającą na tym, że jedna ze składowych polaryzacji jest pochłaniana w krysztale znacznie silniej niż druga, która przechodzi z niewielkim osłabieniem. Właściwość ta jest podstawą, na której jest oparte działanie szeroko stosowanych *polaroidów*. Zamiast jednorodnych kryształów można używać dużej liczby małych kryształków umieszczonych w płytce plastycznej tak, że ich osie optyczne są równoległe.

Gdy na osi biegnącej wiązki światła ustawimy dwie płytki polaryzujące, jedna z nich będzie pełnić funkcję *polaryzatora*, a druga – *analizatora*. Obracając analizator, stwierdzamy, że w pewnych położeniach układ nie przepuszcza prawie wcale światła, a w położeniach różniących się od tamtych o 90° natężenie światła jest maksymalne. Wiąże się to oczywiście z kątem, jaki tworzą ze sobą kierunki polaryzacji w obu polaroidach. Natężenie światła wychodzącego z analizatora w funkcji wspomnianego kąta jest opisane *prawem Malusa*:

$$I = I_m \cos^2 \vartheta , \tag{45.1}$$

gdzie I_m odpowiada kątowi $\vartheta = 0$.

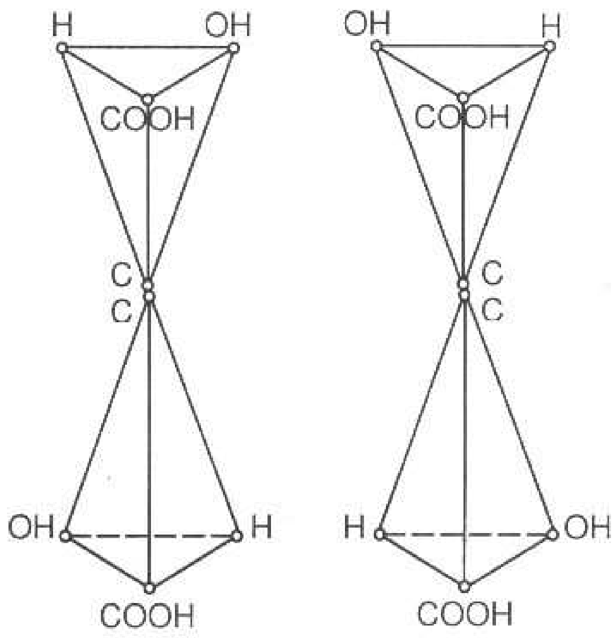
Sprowadzenie drgań świetlnych do jednej płaszczyzny, czyli polaryzacja liniowa, nie jest jedynym sposobem uporządkowania drgań świetlnych. Może istnieć również światło, w którym koniec wektora świetlnego zakreśla linię śrubową wo-

kół kierunku rozchodzenia się. Mówimy wtedy o *polaryzacji kołowej* lub *eliptycznej*.

Światło spolaryzowane kołowo powstaje w wyniku nałożenia się dwóch fal spójnych spolaryzowanych liniowo w kierunkach wzajemnie prostopadłych (mogą nimi być promień zwyczajny i nadzwyczajny) o różnicy faz 90° i równych amplitudach. Wypadkowe drganie będzie kołowe, zgodnie z zasadami dodawania drgań prostopadłych (patrz: figury Lissajous). Gdy amplitudy drgań składowych są różne, polaryzacja jest eliptyczna.

Jeżeli światło spolaryzowane liniowo przechodzi przez niektóre substancje, zwane *optycznie czynnymi*, to następuje *skręcenie płaszczyzny polaryzacji*. Substancje optycznie czynne występują w dwóch postaciach, wykazujących taką samą zdolność skręcającą, lecz skręcających w przeciwnych kierunkach. Stąd substancje optycznie czynne dzielimy na prawo- i lewoskrętne. Drobiny substancji prawo- i lewoskrętnych różnią się budową, podobnie jak obraz i przedmiot w zwierciadle płaskim, są to tzw. *odmiany enancjomorficzne*. W substancjach optycznie czynnych występuje tzw. *węgiel asymetryczny*, w którym każda z wartościowości jest wysycona przez inny atom lub grupę atomów.

Przykładem takiej substancji może być kwas winny, którego dwie postacie enancjomorficzne przedstawiono na rys. 45.3. Silne właściwości skręcenia płaszczyzny polaryzacji wykazują także roztwory cukru.



Rys. 45.3. Budowa cząsteczki kwasu winnego lewoskrętnego (po lewej) i prawoskrętnego (po prawej)

Pomiary i obliczenia

Kąt skręcenia płaszczyzny polaryzacji przez roztwór o stężeniu c określa *wzór Biota*:

$$\alpha = [\alpha] l c, \tag{45.2}$$

gdzie: $[\alpha]$ – właściwa zdolność skręcająca, l – długość drogi światła w roztworze.

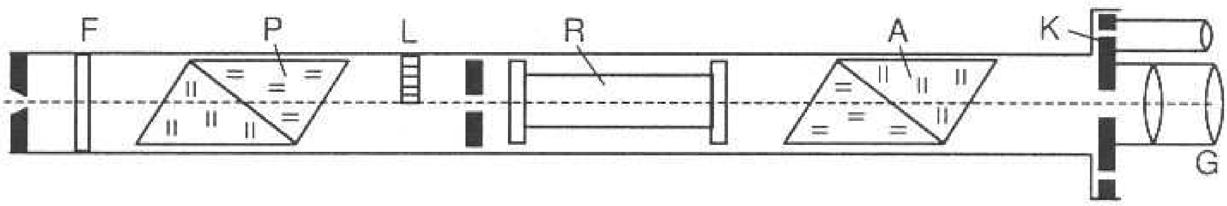
W celu pomiaru kąta skręcenia najpierw na drodze promienia świetlnego umieszczamy czysty rozpuszczalnik i odczytujemy położenie analizatora α_0, a następnie zastępujemy rozpuszczalnik badanym roztworem i znowu odczytujemy położenie analizatora – α_c. Szukany kąt skręcenia wynosi $(\alpha_c - \alpha_0)$.

$\alpha = \alpha_c - \alpha_0$

Urządzeniami, które służą do badania skręcenia płaszczyzny polaryzacji, są *polarymetry*. Polarymetry przeznaczone do pomiaru stężenia cukru nazywamy sacharymetrami. Głównymi elementami polarymetru (rys. 45.4) są: polaryzator *P* i analizator *A* (pryzmaty Nicola) oraz znajdująca się między mini rurka *R* zawierająca roztwór substancji optycznie czynnej.

Światło wchodzi do przyrządu przez filtr *F*, wydzielający wąski zakres długości fal. Analizator jest połączony z kątomierzem *K*. Lunetka *G* służy do obserwacji światła przechodzącego przez układ, a lupa do dokładnego odczytywania kątów obrotu analizatora.

Istota pomiaru sprowadza się do jak najdokładniejszego określenia położenia analizatora, przy którym oświetlenie pola widzenia jest stałe. Gdy obserwację pro-



Rys. 45.4. Budowa polarymetru Laurenta; *F* – filtr światła, *P* – polaryzator, *L* – przyrząd półcieniowy, *R* – badana ciecz w rurce, *A* – analizator, *K* – kątomierz, *G* – lunetka

wadzimy gołym okiem, ustawiamy każdorazowo analizator na maksymalne wygaszenie światła – oko jest w tych warunkach najbardziej czułe na zmiany jasności. W fabrycznych polarymetrach w precyzyjnym ustawieniu położenia analizatora pomaga *przyrząd półcieniowy L*. Jest to płytka nieco skręcająca płaszczyznę polaryzacji, ale tylko dla części wiązki. Jest to powodem, że pole widzenia lunetki jest podzielone na pola, na ogół różnie oświetlone. W zależności od konstrukcji pola mogą mieć kształt dwóch półkoli bądź szerokiego paska środkowego i dwóch pól bocznych Przez obrót analizatora możemy doprowadzić do położenia, w którym oświetlenie całego pola jest niewielkie, ale równe. Minimalny obrót analizatora powoduje rozjaśnienie jednego z pól. Oko ludzkie z dużą dokładnością (około 0,1°) potrafi w tej sytuacji rozróżnić, czy pola są jednakowo oświetlone, czy ich oświetlenia się różnią. Jest to najczulsze położenie analizatora. W innych położeniach możemy uzyskać pola o dużym kontraście lub całe pole jasne.

W celu znalezienia właściwej zdolności skręcającej mierzymy kąty skręcenia dla różnych stężeń i wykorzystujemy fakt, że zależność między tymi wielkościami, dana równaniem (45.2), jest liniowa. Współczynnik nachylenia a obliczamy za pomocą regresji liniowej. Ten sam współczynnik występuje przy c we wspomnianym równaniu jako $[\alpha]l$. Z porównania obu wartości otrzymujemy szukaną wartość właściwej zdolności skręcającej

$$[\alpha] = \frac{a}{l}. \tag{45.3}$$

Przebieg ćwiczenia

1. Zmierzyć długość rurki.
2. Włączyć oświetlenie polarymetru.
3. Nastawić lunetkę na ostrość widzenia linii rozgraniczającej pola oraz lupę odczytową na ostrość widzenia skali.
4. Wstawić rurkę z czystą wodą do polarymetru.
5. Obracając analizator, doprowadzić do równego (ciemnego) pola widzenia i odczytać wskazanie kątomierza. W razie potrzeby powtarzać pomiar, każdorazowo obracając analizator o przypadkowy kąt i na nowo ustalając właściwe położenie.
6. Umieszczać w polarymetrze kolejno rurki z roztworami o różnych stężeniach i odczytywać kąty podobnie jak w punkcie 5.
7. Na papierze milimetrowym wykreślić zależność $\alpha = f(c)$.
8. Obliczyć współczynnik nachylenia oraz jego błąd metodą regresji liniowej.
9. Obliczyć właściwą zdolność skręcającą dla badanej cieczy, wykorzystując równanie (45.3).
10. Obliczyć błąd $[\alpha]$ metodą różniczki zupełnej lub logarytmicznej.
11. Zaokrąglić wyniki obliczeń i przedstawić wynik w postaci ostatecznej.

Zestaw ćwiczeniowy

Polarymetr, lampa, rurki z wodą i roztworami

Pojęcia kluczowe

- Polaryzacja liniowa, polaryzacja przez odbicie i załamanie, podwójne załamanie
- Kryształy anizotropowe i izotropowe, oś optyczna
- Pryzmat Nicola, dichroizm
- Polaryzator i analizator, prawo Malusa
- Polaryzacja kołowa i eliptyczna
- Skręcenie płaszczyzny polaryzacji, węgiel asymetryczny
- Polarymetr, przyrząd półcieniowy
- Wzór Biota
- Pomiary do wykonania, obliczenie właściwej zdolności skręcającej
- Noniusz (rozdz. 5)

46. Wyznaczanie stałej Stefana-Boltzmanna za pomocą pirometru

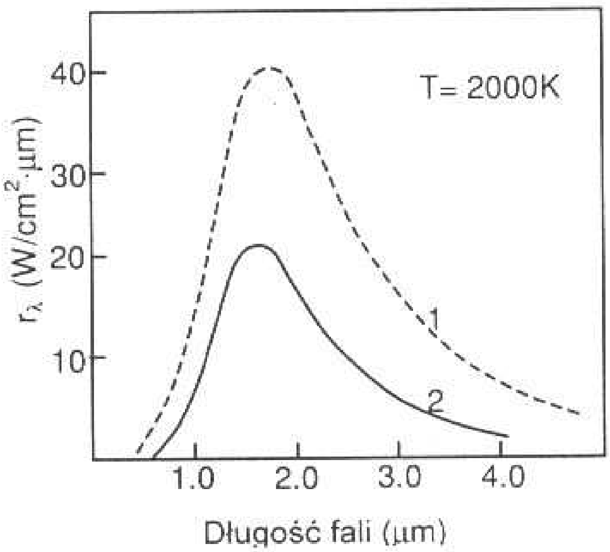
Wprowadzenie

Promieniowanie termiczne dowolnego ciała charakteryzuje się za pomocą tzw. *zdolności emisyjnej* r_λ. Wielkość ta jest zdefiniowana w ten sposób, że $r_\lambda d\lambda$ jest energią promienistą emitowaną w jednostce czasu przez jednostkową powierzchnię w wąskim przedziale długości fal (λ, $\lambda + d\lambda$). Zdolność emisyjna zależy od rodzaju ciała i jest funkcją temperatury oraz długości fali. Zależność zdolności emisyjnej od długości fali nazywa się również *widmem promieniowania* i jest opisana *prawem Plancka*:

$$r_\lambda = \frac{c_1}{\lambda^5}\frac{1}{e^{c_2/kT}-1}, \tag{46.1}$$

w którym c_1, c_2 są pewnymi stałymi, k – stałą Boltzmanna.

Zdolność emisyjna dla wybranej temperatury i długości fali ma różne wartości dla różnych ciał, a wartość maksymalną osiąga w wyidealizowanym przypadku ciała *doskonale czarnego*. Wszystkie ciała rzeczywiste nazywamy *szarymi*. Widma promieniowania ciała doskonale czarnego i szarego w określonej temperaturze przedstawiono na rys. 46.1. Widzimy, że ciało szare charakteryzuje się kształtem widma identycznym z kształtem widma ciała czarnego, lecz mniejszą wartością r_λ dla każdej długości fali.



Rys. 46.1. Widmo promieniowania ciała doskonale czarnego (1) i ciała szarego (2)

Na podstawie rys. 46.1 możemy stwierdzić, że ciało szare promieniuje tak samo jak ciało czarne o odpowiednio niższej temperaturze. Można mu przypisać właściwości ciała czarnego, jeżeli *temperaturę rzeczywistą* T_{rz} zastąpić tzw. *temperaturą czarną* T_c.

Całkowita emisja energetyczna R_c jest energią wypromieniowaną w jednostce czasu przez jednostkową powierzchnię w postaci fal o wszystkich możliwych długościach. Jej wartość otrzymamy, całkując zdolność emisyjną r_λ względem wszystkich długości fal, od zera do nieskończoności:

$$R_c = \int_0^\infty r_\lambda d\lambda . \tag{46.2}$$

Według *prawa Stefana* całkowita emisja energetyczna jest proporcjonalna do czwartej potęgi temperatury bezwzględnej.

$$R_c = \sigma T^4 . \tag{46.3}$$

Współczynnik σ nosi nazwę *stałej Stefana-Boltzmanna*.

Pirometria optyczna

W celu doświadczalnego wyznaczenia stałej Stefana-Boltzmanna posłużymy się *pirometrem optycznym*, przyrządem stosowanym do pomiaru wysokiej temperatury. Metody pirometrii w zależności od prawa promieniowania, na którym są oparte, mają specyficzne właściwości.

1. Metoda oparta na *prawie przesunięć Wiena* wyrażonym równaniem:

$$\lambda_{max} = \frac{C}{T} , \tag{46.4}$$

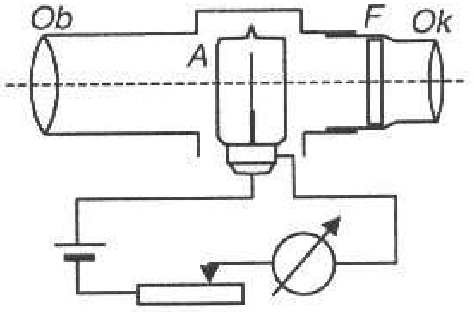
gdzie C jest pewną stałą.

Według *prawa Wiena* długość fali, przy której występuje maksimum jasności λ_{max}, przesuwa się wraz ze zmianą temperatury T – ze wzrostem temperatury λ_{max} maleje. Prawo Wiena wyjaśnia, dlaczego ciało w umiarkowanej temperaturze (np. 600°C) świeci czerwono, a w temperaturze wysokiej (np. 2500°C) ma kolor biało-niebieski. Pomiar temperatury sprowadza się zatem do znalezienia długości fali o największym natężeniu λ_{max} i zastosowania wzoru (46.4).

2. *Metoda emisyjna* opiera się na wykorzystaniu prawa Stefana-Boltzmanna. Aby z powyższego prawa wyznaczyć temperaturę, należy zmierzyć całkowitą energię promieniowania, a także znać stałą σ we wzorze (46.3). Pomiaru energii promieniowania dokonuje się za pomocą *termoogniwa* – promieniowanie skupia się na złączu termoogniwa (patrz rozdz. 29) i w ten sposób ogrzewa je, co prowadzi do powstania różnicy potencjałów. Mierzona różnica potencjałów jest proporcjonalna do pochłoniętej energii – pozwala to wyznaczyć R_c, a w rezultacie temperaturę T.

3. *Metoda równych jasności* pozwala wyznaczyć temperaturę dowolnego ciała na podstawie porównania jasności, dla określonej długości fali, ciała badanego i ciała doskonale czarnego. Stosuje się w tym celu przyrząd zwany *pirometrem ze znikającym włóknem*. Schemat takiego pirometru przedstawiono na rys. 46.2. Podstawową częścią tego przyrządu jest lunetka z obiektywem *Ob* i okularem *Ok*.

W płaszczyźnie ogniskowej obiektywu otrzymujemy obraz powierzchni badanego ciała. W tej samej płaszczyźnie jest umieszczona lampka elektryczna A, której włókno jest zazwyczaj wygięte w półokrąg. Przez okular obserwujemy jednocześnie obraz badanego ciała i włókno lampki. Filtr barwny F wydziela wąski przedział widmowy, zazwyczaj w zakresie czerwonym – około 650 nm. W obwodzie lampki, prócz baterii, znajduje się opornik regulowany pozwalający na uzyskanie różnych wartości temperatury włókna.



Rys. 46.2. Schemat pirometru ze znikającym włóknem
Ob, *Ok* – obiektyw i okular, *A* – żarówka z regulowaną temperaturą włókna, *F* – filtr optyczny, *T* – wskaźnik temperatury żarówki *A*

Gdy jasność włókna jest większa niż jasność ciała, wówczas widzimy jasną linię włókna na tle badanego ciała, natomiast gdy jasność włókna jest mniejsza, widzimy ciemniejszy łuk na jasnym tle. Po zrównaniu jasności ciała i włókna to ostatnie staje się niewidoczne. W ten sposób możemy z dużą dokładnością ustalić równość jasności włókna i ciała.

Przyrząd ma miernik, którego wychylenie jest w zasadzie proporcjonalne do płynącego prądu, ale jest on wycechowany w jednostkach temperatury. Na skali amperomierza są oznaczone wartości temperatury ciała czarnego odpowiadające mierzonym prądom. Jeżeli badane ciało jest ciałem czarnym, to pirometr wskazuje jego rzeczywistą temperaturę, natomiast gdy jest ciałem szarym, wskazuje temperaturę czarną, która jest niższa od rzeczywistej.

Metoda pomiarowa

Ostatnią z pirometrycznych metod pomiaru temperatury wykorzystamy w niniejszym ćwiczeniu, którego ostatecznym celem jest znalezienie wartości stałej Stefana-Boltzmanna.

W temperaturze pokojowej T_0 całkowitą emisję energetyczną ciała szarego można otrzymać, modyfikując równanie (46.3) do postaci:

$$R_0 = k_1 \sigma T_0^4, \qquad (46.5)$$

gdzie: k_1 jest współczynnikiem zależnym od rodzaju ciała – dla ciała czarnego $k_1 = 1$, dla ciał szarych $k_1 < 1$.

Ubytek energii wewnętrznej ciała, spowodowany wypromieniowaniem, jest uzupełniany w sposób ciągły przez pobieranie ciepła z otoczenia. W dowolnej temperaturze T emisja energetyczna ma, zgodnie z prawem Stefana, wartość wyższą niż w temperaturze pokojowej:

$$R = k_1 \sigma T^4. \qquad (46.6)$$

Aby ciało promieniujące utrzymać w podwyższonej temperaturze, należy dostarczyć mu dodatkową energię. W naszym ćwiczeniu ciałem badanym jest wolframowa spirala żarówki oświetleniowej podgrzewana prądem. Dodatkowa energia jest pracą prądu elektrycznego. Warunek równości energii wypromieniowanej (ponad wartość R_0) i energii dostarczonej w wyniku przepływu prądu ma postać:

$$k_1\sigma(T^4 - T_0^4)S = k_2 U i\,, \tag{46.7}$$

gdzie: U – napięcie źródła prądu, i – natężenie prądu, S – powierzchnia spirali żarówki, k_2 – współczynnik wyrażający to, że tylko część pracy prądu elektrycznego zostaje zamieniona na promieniowanie. Doświadczalnie wykazano, że współczynniki k_1 i k_2 mają w przybliżeniu takie same wartości, dzięki czemu można je w równaniu (46.7) uprościć.

Przekształcając wyrażenie (46.7), otrzymamy ostateczną postać stałej Stefana-Boltzmanna:

$$\sigma = \frac{Ui}{S(T^4 - T_0^4)}\,. \tag{46.8}$$

Temperatura T występująca w ostatnim równaniu jest temperaturą rzeczywistą, podczas gdy pomiar pirometrem daje temperaturę czarną. W celu powiązania obu wartości korzystamy z odpowiedniego nomogramu.

Przebieg ćwiczenia

1. Włączyć badaną żarówkę w obwód zawierający regulowane źródło prądu, woltomierz i amperomierz.
2. Doprowadzić napięcie na żarówce do wartości powodującej słabe czerwone świecenie, zmierzyć napięcie i natężenie prądu.
3. Przesuwając okularem, znaleźć ostry obraz włókna lampki pirometru.
4. Przesuwając obiektywem, uzyskać ostry obraz spirali badanej żarówki.
5. Włączyć filtr czerwony.
6. Włączyć obwód pirometru, po czym obracając pokrętłem opornika, doprowadzić do jednakowej jasności obu źródeł promieniowania. Odczytać temperaturę na skali. Jest to temperatura czarna.
7. Przy pierwszym ustawieniu wykonać serię próbną – trzy pomiary temperatury – i ocenić potrzebę zwiększenia serii pomiarowej (patrz rozdz. 3 – rozpoznawanie rodzaju błędu i powtarzanie pomiarów). Wynik analizy tej serii stosować do wszystkich pozostałych pomiarów temperatury.
8. Korzystając z nomogramu, określić temperaturę rzeczywistą.
9. Wyznaczyć temperaturę w laboratorium T_0.
10. Obliczyć stałą Stefana-Boltzmanna ze wzoru (46.8). Wartość powierzchni S jest podana w szczegółowej instrukcji. Temperatura musi być wyrażona w kelwinach.

11. Pomiary wykonać dla różnych wartości temperatury. Po wyczerpaniu zakresu włączyć filtr szary i odczytywać wartości na drugim zakresie.
12. Obliczyć wartość średnią stałej Stefana-Boltzmanna i odchylenie standardowe średniej.
13. Zaokrąglić wyniki obliczeń i przedstawić w ostatecznej postaci.

Zestaw ćwiczeniowy

Pirometr, autotransformator, woltomierz, amperomierz, badana żarówka, ława optyczna

Pojęcia kluczowe

- Promieniowanie termiczne, ciało doskonale czarne
- Zdolność emisyjna, widmo promieniowania, prawo Plancka
- Całkowita emisja energetyczna, prawo Stefana, prawo przesunięć Wiena
- Pirometr, temperatura czarna, temperatura rzeczywista
- Energia wypromieniowana i pobrana w temperaturze otoczenia i w temperaturze wyższej
- Wielkości potrzebne do obliczenia stałej Stafana-Boltzmanna.

47. Wyznaczanie sprawności świetlnej żarówki za pomocą fotometru Lummera-Brodhuna

Wprowadzenie

Ilość energii, jaką przenoszą fale świetlne przez dowolną powierzchnię w jednostce czasu, nazywa się *strumieniem świetlnym* Φ. Strumień świetlny ma wymiar mocy i może być zmierzony na podstawie ilości ciepła oddanego ciału całkowicie pochłaniającemu. Strumień całkowity otrzymamy, mierząc energię przechodzącą w jednostce czasu przez powierzchnię otaczającą źródło światła.

Z przestrzeni wokół ciała promieniującego wydzielmy nieskończenie mały kąt bryłowy $d\Omega$. *Natężeniem światła* wysyłanego przez źródło w danym kierunku jest stosunek strumienia zawartego w granicach kąta bryłowego do wartości tego kąta:

$$I = \frac{d\Phi}{d\Omega}. \tag{47.1}$$

Jeżeli źródło jest *izotropowe*, to natężenie światła we wszystkich kierunkach jest jednakowe i w równaniu (47.1) możemy zamiast różniczek wstawić wartości skończone. Jeśli w równaniu (47.1) wstawimy wartość pełnego kąta bryłowego –

– 4π, otrzymamy związek między całkowitym strumieniem Φ_c a natężeniem światła dla źródła izotropowego

$$\Phi_c = 4\pi I\,. \tag{47.2}$$

Natężenie światła jest wielkością charakteryzującą źródło światła, a nie powierzchnię oświetlaną. Wielkość ta nazywa się również *światłością*. Obie nazwy są równoważne i mogą być używane zamiennie.

W przypadku źródła anizotropowego natężenie światła wysyłanego w różnych kierunkach jest różne. Graficznie charakterystykę źródła anizotropowego możemy podać, odkładając od pewnego punktu początkowego we wszystkich kierunkach promienie wodzące, których długość jest proporcjonalna do natężenia światła w danym kierunku.

Podstawową jednostką fotometryczną jest *kandela* definiowana, podobnie jak inne jednostki podstawowe (np. metr, amper), przez określenie wzorca, którym w tym przypadku jest ciało doskonale czarne o powierzchni (1/60) cm^2 i temperaturze 1773°C (temperatura krzepnięcia platyny). Światłość tego źródła w kierunku prostopadłym do powierzchni jest równa jednej kandeli (1 cd).

Pozostałe jednostki ustalamy jako pochodne na podstawie praw wiążących je ze światłością.

Jednostkę strumienia otrzymujemy z równania (47.1) jako strumień wysyłany w granicach kąta bryłowego, równego jednemu steradianowi, przez izotropowe źródło światła o światłości jednej kandeli. Jednostka strumienia nosi nazwę *lumen* (lm):

$$1\ \text{lm} = 1\text{cd}\cdot 1\ \text{sr}. \tag{47.3}$$

Rozciągłe (niepunktowe) źródła charakteryzuje się ponadto, podając ich *luminancję*, czyli *jaskrawość* L, definiowaną jako stosunek światłości do powierzchni widzianej pod kątem φ:

$$L = \frac{I}{S\cos\varphi}, \tag{47.4}$$

gdzie kąt φ jest zawarty między normalną do powierzchni świecącej a kierunkiem obserwacji.

Z powyższego określenia wynika, że luminancja jest liczbowo równa światłości jednostki powierzchni źródła. Jednostką luminancji jest *nit* (nt)

$$1\ \text{nt} = 1\ \text{cd/m}^2. \tag{47.5}$$

Światło padające na pewną powierzchnię ulega odbiciu lub rozproszeniu, dzięki czemu staje się ona wtórnym źródłem światła. Stosunek strumienia $d\Phi$ do wielkości powierzchni dS, na którą pada, nazywamy *oświetleniem* E:

$$E = \frac{d\Phi}{dS} . \tag{47.6}$$

Jednostką oświetlenia jest *luks* (lx):

$$1 \text{ lx} = 1 \text{ lm/m}^2. \tag{47.7}$$

Jest to oświetlenie powodowane przez strumień jednego lumena padający na powierzchnię jednego metra kwadratowego.

Metoda pomiarowa

Oświetlenie dowolnej powierzchni, znajdującej się w odległości r od źródła punktowego o światłości I i nachylonej pod kątem ϑ do kierunku padania światła, wyraża wzór:

$$E = \frac{I}{r^2} \cos\vartheta . \tag{47.8}$$

Powyższe równanie stanowi treść *prawa Lamberta*. Chociaż w praktyce źródła światła nigdy nie są punktowe, prawo Lamberta możemy zastosować z wystarczającą dokładnością, jeżeli odległość r jest 10 razy większa niż średnica źródła.

Za pomocą obserwacji wzrokowej nie możemy ocenić ilościowo stosunku światłości dwóch różnych źródeł, natomiast dość dokładnie możemy stwierdzić równość oświetlenia dwóch powierzchni. Tę ostatnią właściwość wykorzystujemy do pomiarów fotometrycznych światłości. Zasada pomiaru polega na takim dobraniu odległości źródła badanego i wzorcowego od fotometru, aby oświetlenie pewnej powierzchni przez oba źródła było jednakowe. Oznaczywszy światłość źródła wzorcowego indeksem w, a mierzonego x, zapiszemy:

$$E_w = \frac{I_w}{r_w^2} \cos\vartheta, \quad E_x = \frac{I_x}{r_x^2} \cos\vartheta . \tag{47.9}$$

Jeżeli doprowadzimy do równości oświetleń ($E_w = E_x$) i jeżeli równe są oba kąty ϑ, to otrzymamy proporcję:

$$\frac{I_x}{I_w} = \frac{r_x^2}{r_w^2} . \tag{47.10}$$

Powyższy związek pozwala wyznaczyć na podstawie pomiarów odległości bezwzględną wartość światłości źródła, gdy jest znana światłość źródła wzorcowego. Najczęściej jednak wyznaczamy *światłość względną* $I_r = I_x/I_w$.

Sprawnością świetlną źródła nazywamy stosunek jego światłości do pobieranej mocy P:

$$\eta = \frac{I}{P} \qquad (47.11)$$

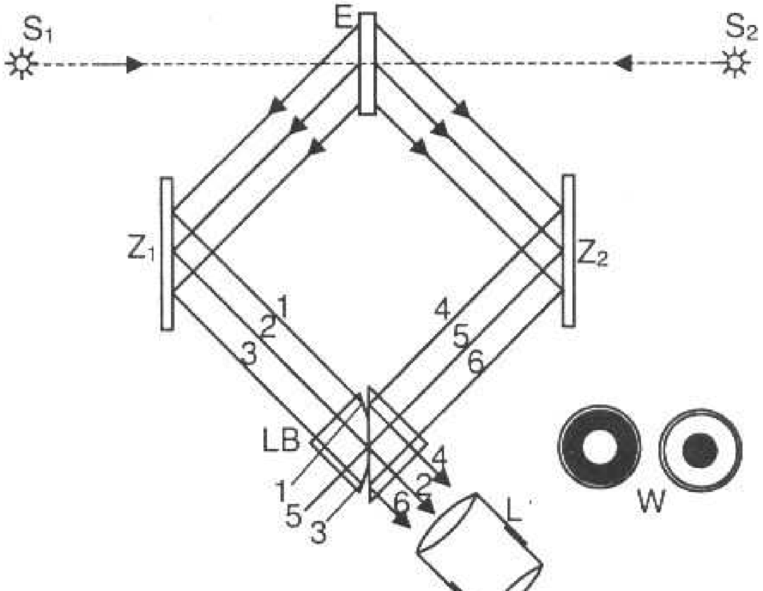
Po wstawieniu we wzorze (47.11) światłości względnej uzyskamy zależność sprawności od mocy w jednostkach względnych.

Fotometr Lummera-Brodhuna

Przedstawiony na rys. 47.1 fotometr Lummera-Brodhuna zawiera dwa główne elementy: płytkę rozpraszającą E (najczęściej gipsową) i *kostkę fotometryczną* Lummera-Brodhuna LB, a także elementy pomocnicze: zwierciadła Z, pryzmat i lunetkę L, umożliwiające dogodną obserwację oświetlonych powierzchni.

Źródła światła S_1 i S_2 oświetlają przeciwległe powierzchnie płytki E. Światło rozproszone od płytki odbija się od zwierciadeł Z_1 i Z_2, po czym pada na kostkę fotometryczną.

Kostka jest wykonana z dwóch pryzmatów prostokątnych dociśniętych ściśle do siebie w środkowej części podstaw. Zewnętrzne części podstawy jednego z pryzmatów są zaokrąglone, tak że w tej części między pryzmatami znajduje się warstwa powietrza. Przez powierzchnię styku pryzmatów światło przechodzi bez przeszkód (promień 2), natomiast powierzchnie graniczące z powietrzem odbijają świa-



Rys. 47.1. Fotometr Lummera-Brodhuna; S_1, S_2 – żarówka wzorcowa i badana, E – płytka rozpraszająca, LB – kostka fotometryczna, L – lunetka, W – przykładowe widoki w lunetce, Z – zwierciadła

tło. Promienie 1 i 3 odbite od powierzchni zaokrąglonej są pochłaniane przez obudowę fotometru. W rezultacie, z wiązki 1-2-3 do lunetki L dochodzi tylko promień 2 i oświetla środek pola widzenia. Z kolei z wiązki 4-5-6 promień 5 przechodzi przez powierzchnię styku pryzmatów i jest pochłaniany przez obudowę, natomiast

promienie 4 i 6 ulegają odbiciu wewnętrznemu na granicy szkło–powietrze, po czym biegną równolegle do promienia 2 i oświetlają część zewnętrzną pola widzenia lunetki *L*.

W ten sposób w lunetce obserwuje się pole, którego część centralna jest oświetlona przez źródło S_1, a pierścień zewnętrzny – przez źródło S_2. Części pola na ogół różnią się jasnością. Pomiar polega na przesunięciu fotometru na ławie optycznej do położenia, w którym oświetlenie obu części jest jednakowe.

Przebieg ćwiczenia

1. Żarówkę wzorcową podłączyć do źródła o ustalonym napięciu, a żarówkę badaną do źródła o napięciu regulowanym.
2. Ustawić fotometr w położeniu około 1/5 odległości między żarówkami, bliżej żarówki badanej, a następnie dobrać napięcie wyjściowe autotransformatora, tak aby uzyskać równe oświetlenie pól w fotometrze. Odczytać napięcie na żarówce i natężenie prądu.
3. Wykonać serię próbną – trzy pomiary położenia fotometru, każdorazowo „psute" i ustawiane na nowo – i ocenić potrzebę zwiększenia serii pomiarowej (patrz rozdz. 3 – rozpoznawanie rodzaju błędu i powtarzanie pomiarów). Wynik analizy tej serii stosować do wszystkich pozostałych napięć na żarówce.
4. Zwiększać napięcie i dla każdej wartości ustawiać fotometr. Odczytać napięcie i natężenie prądu.
5. Dla każdego napięcia obliczyć moc pobieraną przez żarówkę i światłość względną żarówki na podstawie wzoru (47.10).
6. Obliczyć błąd mocy i błąd światłości, w obu przypadkach zastosować metodę różniczki logarytmicznej.
7. Sporządzić wykres zależności wydajności świetlnej (względnej) od pobieranej mocy.
8. Nanieść prostokąty błędów.

Zestaw ćwiczeniowy

Ława optyczna, fotometr, żarówki, autotransformator (rozdz. 2.4), woltomierz, amperomierz

Pojęcia kluczowe

- Definicje wielkości fotometrycznych: strumień świetlny, światłość (natężenie), luminancja, oświetlenie
- Jednostki fotometryczne: kandela, lumen, nit, luks, wydajność świetlna
- Prawo Lamberta, fotometr: budowa, bieg promieni, pomiar światłości

48. Badanie widm absorpcji roztworów za pomocą spektrokolorymetru

Wprowadzenie

Absorpcja, czyli pochłanianie, jest właściwością ośrodków polegającą na osłabieniu natężenia światła, które przez nie przechodzi. Na elementarnej drodze dx zmiana natężenia światła w wyniku pochłonięcia jest określona następującym wyrażeniem:

$$dI = -kIdx\,, \tag{48.1}$$

gdzie: I jest całkowitym natężeniem światła, k – *współczynnikiem absorpcji*.

W ogólnym przypadku ośrodka niejednorodnego współczynnik k jest różny w różnych miejscach ośrodka i do obliczenia natężenia światła po przejściu przez ośrodek o makroskopowej grubości d trzeba znać funkcyjną zależność współczynnika absorpcji od położenia. Z taką sytuacją spotykamy się np., rozważając pochłanianie światła słonecznego przez atmosferę, której gęstość zmienia się wraz z wysokością.

Zagadnienie staje się prostsze w przypadku ośrodków jednorodnych, dla których k nie zależy od położenia. Możemy wówczas w równaniu (48.1) rozdzielić zmienne i bezpośrednio scałkować obie strony:

$$\int_{I_0}^{I} \frac{dI}{I} = -k\int_{0}^{d} dx\,. \tag{48.2}$$

Obliczenie tych elementarnych całek prowadzi do *prawa Lamberta*:

$$I = I_0 e^{-kd}\,, \tag{48.3}$$

gdzie I_0, I oznaczają natężenie światła, odpowiednio, wchodzącego do i wychodzącego z ośrodka o grubości d.

Zgodnie z *prawem Beera*, dla roztworów o niewielkim stężeniu współczynnik absorpcji jest proporcjonalny do stężenia c, co wyrażamy wzorem:

$$k = Ec\,, \tag{48.4}$$

gdzie E jest stałą, zależną od rodzaju roztworu.

Po podstawieniu powyższej zależności do prawa Lamberta otrzymujemy *prawo Lamberta-Beera*:

$$I = I_0 e^{-Ecd}\,. \tag{48.5}$$

W praktyce często mierzymy *absorpcję względną* zdefiniowaną jako:

$$A = \frac{I_0 - I}{I_0} \qquad (48.6)$$

oraz przepuszczalność względną:

$$T = \frac{I}{I_0} \qquad (48.7)$$

Z równań (48.6) i (14.87) widać natychmiast, że

$$A + T = 1, \qquad (48.8)$$

co jest oczywistą konsekwencją podziału całej energii światła na część pochłoniętą i przepuszczoną. Mnożąc równania (48.6) i (48.7) przez 100%, otrzymujemy definicję absorpcji i przepuszczalności procentowej.

Inną wielkością charakteryzującą pochłanianie jest *ekstynkcja*, zdefiniowana następująco:

$$e = \ln \frac{I_0}{I} \qquad (48.9)$$

Wartości e mieszczą się w zakresie od 0 do ∞. Gdy pochłanianie jest bardzo słabe ($I \approx I_0$), ekstynkcja dąży do zera, natomiast w przypadku silnego pochłaniania ($I << I_0$) ekstynkcja dąży do nieskończoności. Wartość ekstynkcji jest wprost proporcjonalna do grubości ośrodka i do stężenia roztworu.

Bardzo często występuje zjawisko *absorpcji selektywnej*, gdy różne długości fali nie są pochłaniane w równym stopniu. Współczynnik pochłaniania oraz stała E są wówczas funkcjami długości fali, a wprowadzone wyżej pojęcia należy stosować osobno dla każdej długości fali.

Z powodu selektywnej absorpcji światło przechodzące przez ciało jest zabarwione. Stopień nasycenia barwy zależy od grubości warstwy pochłaniającej, a w przypadku roztworu od jego stężenia. Powyższe zjawisko wykorzystujemy do określenia stężenia roztworów. W tym celu stopień nasycenia barwy światła przechodzącego przez określonej grubości warstwę roztworu badanego musimy porównać ze stopniem nasycenia roztworu wzorcowego o tej samej barwie i grubości.

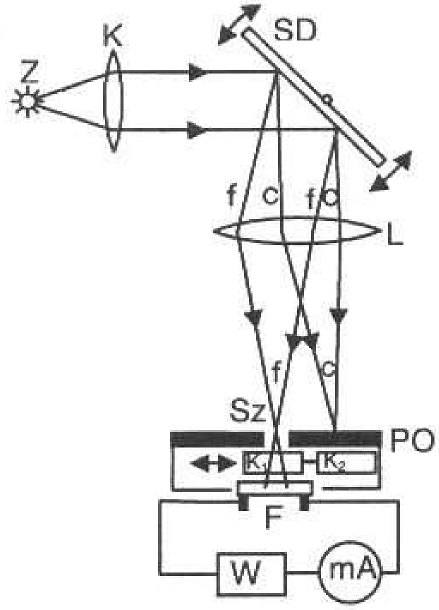
Przyrząd służący do oznaczania stężenia roztworów na podstawie pochłaniania nazywamy *kolorymetrem*. W zależności od sposobu oceny barwy kolorymetry można podzielić na *wizualne* oraz *fotoelektryczne*, zwane również *fotokolorymetrami*. Obecnie w użyciu są prawie wyłącznie te drugie; natężenie światła jest w nich mierzone za pomocą fotoogniwa. *Spektrokolorymetry* umożliwiają ponadto badanie przepuszczalności lub absorpcji dowolnej długości fali.

Budowa spektrokolorymetru

Głównymi elementami spektrokolorymetru, których wzajemne rozmieszczenie przedstawiono na rys. 48.1, są: źródło światła białego Z, siatka dyfrakcyjna SD,

szczelina *Sz*, fotoogniwo *F*, wzmacniacz prądu stałego *W* oraz mikroamperomierz. Światło białe z żarówki pada na kolimator *K*, który tworzy wiązkę równoległą dochodzącą do siatki dyfrakcyjnej.

Odbiciowa siatka dyfrakcyjna (patrz rozdz. 43) rozszczepia każdy promień światła białego na promienie o różnych długościach fal; każdy z nich tworzy inny kąt względem wiązki padającej. Promienie te przechodzą następnie przez soczewkę



Rys. 48.1. Schemat spektrokolorymetru; *Z* – źródło światła białego, *K* – kolimator, *SD* – siatka dyfrakcyjna, *L* – soczewka, *PO* – płaszczyzna ogniskowa, *Sz* – szczelina, K_1, K_2 – kuweta z badanym ciałem i kuweta z ciałem porównawczym, *F* – fotolement, *W* – wzmacniacz, *c* – czerwony, *f* – fioletowy

L, która skupia promienie każdej barwy w innym punkcie płaszczyzny ogniskowej, tworząc wyraźne widmo świecenia żarówki. Na rysunku 48.1 zaznaczono tylko promienie fioletowe *f* i czerwone *c*. Wąski wycinek widma przechodzi przez szczelinę *Sz*, następnie przez roztwór w kuwecie, po czym pada na fotoogniwo. Możemy powiedzieć, że światło przechodzące przez szczelinę jest monochromatyczne, tzn. zawiera długości fal z małego przedziału wokół wartości λ. Obracając siatkę dyfrakcyjną – za pomocą pokrętła na płycie czołowej wyskalowanego w długościach fali – przesuwamy całe widmo względem szczeliny i powodujemy, że przechodzi przez nią światło o żądanej długości fali.

Fotoogniwo jest elementem, w którym następuje zamiana energii promieniowania na energię elektryczną w wyniku zjawiska fotowoltaicznego. Oświetlenie ogniwa wywołuje różnicę potencjałów na jego elektrodach, a po zamknięciu obwodu – przepływ prądu. Gdy opór zewnętrzny jest mniejszy niż opór samego ogniwa, wówczas w obwodzie płynie tzw. prąd zwarcia, który w znacznym zakresie jest proporcjonalny do oświetlenia. Ze względu na dużą łatwość mierzenia prądu powyższa właściwość jest szeroko wykorzystywana do pomiaru oświetlenia, a także natężenia światła.

Miernik fotoprądu w kolorymetrze ma najczęściej dwie skale; jedna, liniowa o zakresie 0–100, wyraża przepuszczalność procentową odniesioną do przepuszczalności czystego rozpuszczalnika i kuwety, natomiast druga, nieliniowa o zakresie 0–∞, podaje wartość ekstynkcji.

Ze względu na małą wartość prądu fotoogniwa w obwodzie znajduje się elektroniczny wzmacniacz prądu stałego, który oprócz innych elementów zawiera dwa regulowane oporniki pozwalające ustalić wzmocnienie oraz położenie zerowe wskazówki miernika przy nieoświetlonym fotoogniwie (do zasłaniania światła służy zasłona, obracana dźwignią znajdującą się na płycie czołowej).

Zasada pomiaru

W pierwszej części wyznaczamy *widmo przepuszczalności* roztworów, czyli zależność przepuszczalności względnej od długości fali. Na podstawie otrzymanego widma znajdujemy obszar, w którym światło jest silnie pochłaniane, i następnie dla długości fali z tego obszaru badamy zależność przepuszczalności od stężenia roztworu.

Aby otrzymać widmo przepuszczalności roztworu, należy zmierzyć wartości fotoprądu dla różnych długości fali i wykreślić zależność $i = f(\lambda)$. Otrzymany wykres nie jest jeszcze właściwym widmem przepuszczania. Składają się na to następujące przyczyny:

- natężenie *światła emitowanego* przez źródło jest funkcją długości fali, tzn. natężenie światła padającego na badany roztwór jest różne dla różnych barw;
- czułość fotoogniwa jest również funkcją długości fali, tzn. oświetlenie fotoogniwa światłem o różnych barwach, choć o jednakowym natężeniu, daje fotoprąd o różnych wartościach;
- światło jest pochłaniane przez sam rozpuszczalnik i kuwety.

Aby wyeliminować jednocześnie wszystkie czynniki zniekształcające widmo, stosujemy metodę porównawczą, polegającą na użyciu do pomiarów dwóch identycznych kuwet, z których jedna zawiera badany roztwór, a druga – czysty rozpuszczalnik. Uchwyt z kuwetami jest przystosowany do przesuwania względem szczeliny.

Zmieniając długości fal w całym zakresie widzialnym (400–700 nm), mierzymy wychylenia miernika na skali liniowej dla obu próbek. Na podstawie uzyskanych wyników wykonujemy wykresy zależności $i(\lambda)$ oraz $i_0(\lambda)$; i_0 oznacza wychylenie dla czystego rozpuszczalnika. Cała krzywa powinna zawierać co najmniej 15 punktów pomiarowych. W zakresie szybkich zmian i ekstremów punkty pomiarowe powinny być gęstsze niż w zakresach łagodnych zmian funkcji. Jasne jest, że krzywa $i_0(\lambda)$ leży w każdym punkcie powyżej krzywej $i(\lambda)$, gdyż określa ona maksymalną przepuszczalność danego rodzaju roztworu.

Poprawny kształt widma przepuszczalności otrzymamy, dzieląc krzywą dla roztworu przez krzywą dla czystego rozpuszczalnika i od wyniku odejmując jedność:

$$T(\lambda) = \frac{i(\lambda)}{i_0(\lambda)} - 1. \qquad (48.11)$$

Tak określona wielkość nazywa się *przepuszczalnością względną*. W praktyce dzielenie jednej krzywej przez drugą polega na obliczaniu stosunku rzędnych obu krzywych dla tych długości fal, dla których zmierzyliśmy fotoprąd. Po wykonaniu odpowiednich obliczeń nanosimy punkty na wykres, którego współrzędnymi są: przepuszczalność względna T oraz długość fali λ. Wartości na osiach odciętych mieszczą się w przedziale 400–700 nm, a na osi rzędnych 0–1.

Na podstawie otrzymanego wykresu znajdujemy długość fali najsilniej pochłanianej przez roztwór i następnie dla tej długości wykonujemy pomiary przepuszczalności kilku roztworów o różnych stężeniach. Ich wyniki ujmujemy w postaci wykresu zależności fotoprądu od stężenia.

Przebieg ćwiczenia

1. Włączyć przyrząd do sieci i przeprowadzić wstępne regulacje, po czym odczekać około 15 min na ustalenie się warunków termicznych i przeprowadzić regulacje końcowe.
2. Wstawić do uchwytu kuwetę z czystym rozpuszczalnikiem i kuwetę z roztworem o średnim stężeniu.
3. Zmieniając długości fal co 10–50 nm, odczytywać wychylenia miernika dla obu cieczy.
4. Sporządzić wykresy fotoprądów i oraz i_0 w zależności od długości fali.
5. Obliczyć stosunki i/i_0 dla każdej długości fali i na tym samym wykresie nanieść wartości przepuszczalności względnej. Na osi rzędnych nanieść odrębne skale dla wychyleń i dla przepuszczalności.
6. Dla długości fali odpowiadającej maksymalnej absorpcji i dla roztworów o kilku stężeniach zmierzyć wychylenie miernika.
7. Wykonać wykres zależności fotoprądu od stężenia roztworu.

Zestaw ćwiczeniowy

Spektrokolorymetr, badane roztwory

Pojęcia kluczowe

- Pochłanianie (absorpcja): zmiana natężenia na drodze elementarnej, prawo Lamberta, absorpcja selektywna
- Prawo Beera, prawo Lamberta-Beera
- Absorpcja i przepuszczalność względna i procentowa
- Przepuszczalność (transmisja), ekstynkcja
- Kolorymetry, budowa spektrokolorymetru, fotoogniwo
- Wyznaczanie widma przepuszczalności

Tabele

Tabela 1. Niektóre właściwości mechaniczne ciał stałych w temperaturze 20°C

Nazwa ciała	Gęstość 10^3 kg·m^{-3}	Moduł Younga 10^{10} N·m^{-2}	Moduł sztywności 10^{10} N·m^{-1}·rad^{-1}	Prędkość dźwięku 10^3 m·s^{-1}
Bizmut	9,80	3,1	1,2	–
Cyna	7,30	3,9–5,4	1,8	2,500
Cynk	7,04–7,19	3,4–13	2,6–4,6	3,700
Glin	2,70	6,2–7,3	2,2–2,7	5,104
Kadm	8,66		2,3	2,307
Konstantan	8,9	17	6,1	–
Kwarc topiony	–	5,9	–	–
Miedź	8,89	7,9–13	4,0–4,8	3,560
Mosiądz	8,44	10,3	4,2	3,500
Ołów	11,34	1,4–1,7	0,64	1,277
Srebro	10,49	6,9–7,9	2,4–2,9	2,610
Szkło	2,6–5,9	4,9–7,9	1,7–3	5–6
Stal	7,83	21,5	8,15	4,990
Wolfram	18,6–19,3	35,4	13,2	–
Żelazo czyste	7,85	–	–	5,130
Żelazo kute	7,8–7,9	21,3	8,1	–

Tabela 2. Niektóre właściwości cieplne ciał stałych w temperaturze 20°C

Nazwa ciała	Ciepło właściwe 10^3 J·kg^{-1}·K^{-1}	Temperatura topnienia °C	Temperatura wrzenia °C	Przewodnictwo cieplne J·m^{-1}·s^{-1}·K^{-1}
Bizmut	0,123	271,3	1560	–
Cyna	0,226	231,9	2260	–
Cynk	0,384	419	907	64,8
Glin	0,896	659,7	2057	226
Kadm	0,231	320,9	767	–
Konstantan	0,41	1290	–	–
Kwarc topiony		1710	–	12–67
Miedź	0,385	1083	2336	384
Mosiądz	0,388	910	–	85–109
Ołów	0,128	327,4	1620	34,7
Srebro	0,234	960,8	1950	825
Szkło	0,832	800–1400	–	0,8–1,1
Stal	–	1400	–	48
Wolfram	0,144	3370	5900	199
Żelazo czyste	–	1535	3000	67,2

Tabela 3. Niektóre właściwości cieczy w temperaturze 20°C

Nazwa cieczy	Gęstość $10^3\ kg \cdot m^{-1}$	Współczynnik lepkości $kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}$	Ciepło właściwe $10^3\ J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$	Temperatura topnienia °C	Temperatura wrzenia °C
Aceton	0,792	0,030	1,96	–95	57
Alkohol etylowy	0,791	0,120	2,38	–117,3	78,3
Alkohol metylowy	0,788	0,0597	2,51	–97,8	64,7
Benzen	0,878	0,0652	1,72	5,48	80,2
Chloroform	1,480	0,0564	0,98	–63,5	61,2
Czterochlorek węgla	1,594	0,096	–	–	–
Eter etylowy	0,714	0,0234	2,30	–117,6	34,6
Gliceryna	1,260	49,4	2,43	–17	291
Olej rycynowy	0,965	98,6	–	–	–
Oliwa z oliwek	0,91	8,4	–	2–6	300
Rtęć	13,55	0,155	0,136	–38,87	356,9
Woda	0,998	0,100	4,186	0,0	100,0

Tabela 4. Opór właściwy (w 0°C) i współczynnik temperaturowy metali i stopów

Materiał	Opór właściwy $10^{-8}\ \Omega \cdot m$	Współczynnik temperaturowy $10^{-1}\ K^{-1}$	Materiał	Opór właściwy $10^{-8}\ \Omega \cdot m$	Współczynnik temperaturowy $10^{-3}\ K^{-1}$
Cynk	5,65	4,17	Nowosrebro	30	0,35
Glin	2,5	4,60	Ołów	19,2	4,28
Konstantan	45	–0,05	Platyna	9,81	3,96
Manganin	43	0,02	Rtęć	94,07	0,99
Miedź	1,55	4,33	Srebro	1,49	4,30
Mosiądz	6,3	1,53	Wolfram	4,89	5,10
Nikiel	6,14	6,92	Żelazo	8,6	6,51
Nikielin	43	0,23			

Tabela 5. Zależność siły termoeletrycznej żelazo–konstantan od różnicy temperatury

Temperatura °C	E mV	Temperatura °C	E mV	Temperatura °C	E mV
0	0,00	350	19,32	700	39,30
50	2,66	400	22,07	750	42,48
100	5,40	450	24,82	800	45,72
150	8,19	500	27,58	850	49,00
200	10,99	550	30,39	900	52,29
250	13,97	600	33,27	950	55,25
300	16,56	650	36,24	1000	58,22

Tabela 6. Zależność siły termoelektrycznej termoogniwa miedź–konstantan od różnicy temperatury (względem 0°C)

Różnica temperatury °C	Siła termoelektryczna, mV					
	–200	–100	0	100	200	300
0	–5,54	–3,35	0,00	4,28	9,29	14,86
10	–5,38	–3,06	0,40	4,70	9,82	15,44
20	–5,20	–2,77	0,80	5,23	10,44	16,03
30	–5,02	–2,46	1,20	5,71	10,90	16,62
40	–4,82	–2,14	1,67	6,20	11,46	17,22
50	–4,60	–1,85	2,03	6,70	12,01	17,82
60	–4,38	–1,47	2,47	7,21	12,57	18,42
70	–4,14	–1,11	2,91	7,72	13,14	19,02
80	–3,89	–0,75	3,36	8,23	13,71	19,63
90	–3,62	–0,38	3,81	8,76	14,28	–

Tabela 7. Zależność siły termoelektrycznej chromonikiel – nikiel od różnicy temperatury

Różnica temperatury °C	Siła termoelektryczna, mV				
	0	20	40	60	80
0	0,0	0,80	1,61	2,43	3,26
100	4,10	4,92	5,73	6,53	7,33
200	8,13	8,93	9,74	10,56	11,38
300	12,21	13,04	13,87	14,71	15,55
400	16,39	17,24	18,08	18,93	19,78
500	20,64	21,49	22,34	23,20	24,05
600	24,90	25,75	26,60	27,45	28,29
700	29,14	29,98	30,82	31,65	32,48
800	33,31	34,12	34,94	35,75	36,56
900	37,36	38,16	38,96	39,75	40,53
1000	41,31	42,08	42,86	43,62	44,38
1100	45,14	45,89	46,64	47,38	48,12
1200	48,85	49,57	50,29	51,00	51,71

Tabela 8. Niektóre właściwości ciał ferro- i ferrimagnetycznych
(μ_p – przenikalność początkowa, μ_{max} – przenikalność maksymalna, H_c – koercja, T_c – temperatura Curie)

Materiał	μ_p	μ_{max}	H_c A·m^{-1}	T_c K
78 Permalloy (78,5% Ni)	8000	10^5	4	473
$CoFe_2O_4$	1	1	51700	768
Ferrokobalt (35% Co)	1000	$27\cdot10^3$	16–60	1253
Kobalt (99% Co)	70	250	800	1393
MnBi (20% Mn, 80% Bi)			263000	633
Nikiel (99% Ni)	110	600	55	631
Stal krzemowa (4% Si)	500	$7\cdot10^3$	40	963
Stal miękka (0,2% C)	120	$2\cdot10^3$	143	1043
Supermalloy (5% Mo, 79% Ni)	10^5	10^6	0,16	673
Tlenek żelaza (Fe_3O_4)	70	70		858
Żelazo czyste (99,95% Fe)	10^4	$2\cdot10^5$	4	1053
Żelazo tech. (99,8% Fe)	150	$5\cdot10^3$	80	1053

Tabela 9. Współczynniki załamania światła względem powietrza
(w temperaturze 15°C dla żółtej linii sodu)

Materiał	n	Materiał	n
Aceton	1,36	Kwarc topiony	1,458
Alkohol etylowy	1,36	Olej parafinowy	1,44
Alkohol metylowy	1,33	Szkło zwykłe	1,518
Benzen	1,504	Szkło crown	1,525
Bursztyn	1,546	Szkło flint	1,569
Czterochlorek węgla	1,464	Woda	1,333
Gliceryna	1,47	Żelatyna	1,530

Tabela 10. Długość fal linii widmowych niektórych pierwiastków
(b – bardzo silna, s – silna, m – słaba, bez oznaczenia – b. słaba)

Pierwiastek/λ (nm)	Pierwiastek/λ (nm)	Pierwiastek/λ (nm)	Pierwiastek/λ (nm)
Wodór	**Rtęć**	**Neon**	**Kadm**
s656,3	623,4	s640,2	783,5
m486,1	b579,1	s614,3	738,4
434,5	b577,0	594,5	m643,8
410,2	s546,1	b585,2	m515,5
	496,0	540,0	m508,5
Hel	m491,0	534,1	s480,0
s667,8	b435,8	482,7	m467,8
b587,6	m407,8		
504,8	b404,7	**Cynk**	**Miedź**
m501,6		s636,2	s578,2
m492,2	**Sód**	s518,2	570,0
471,3	b589,6	s481,2	s521,8
m447,1	b589,0	s472,2	s515,3
439,0		s468,0	458,7
	Potas	s463,0	437,8
Lit	s769,9		427,5
s670,8	s766,5		406,3
610,4	m404,7		402,3

Skorowidz